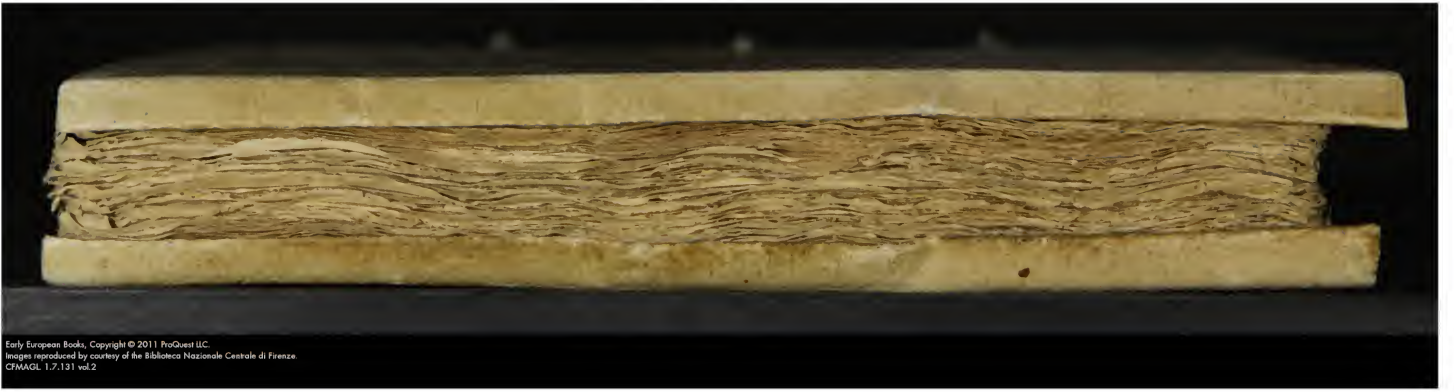


Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.131 vol.2



Early European Books, Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.131 vol.2

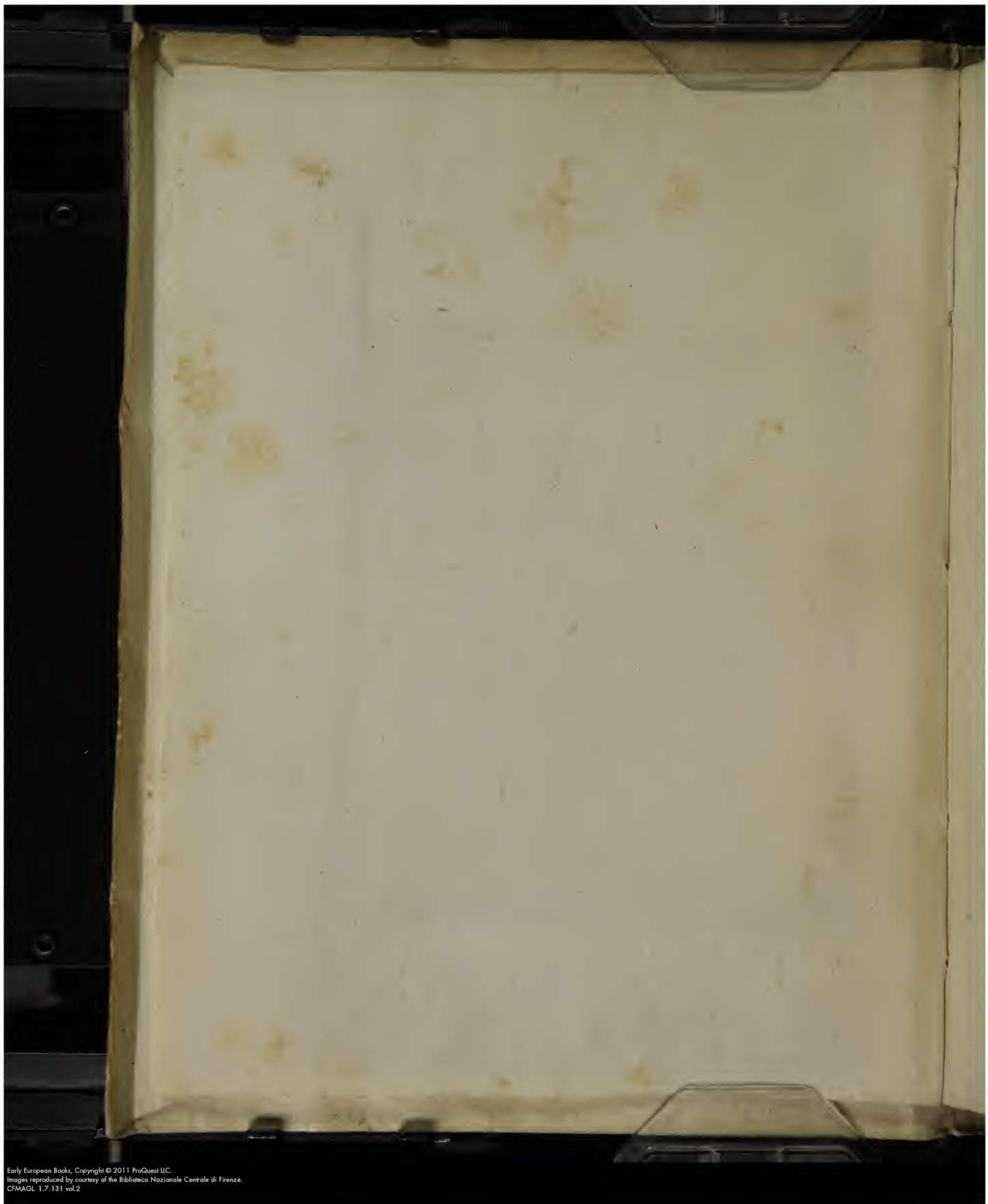


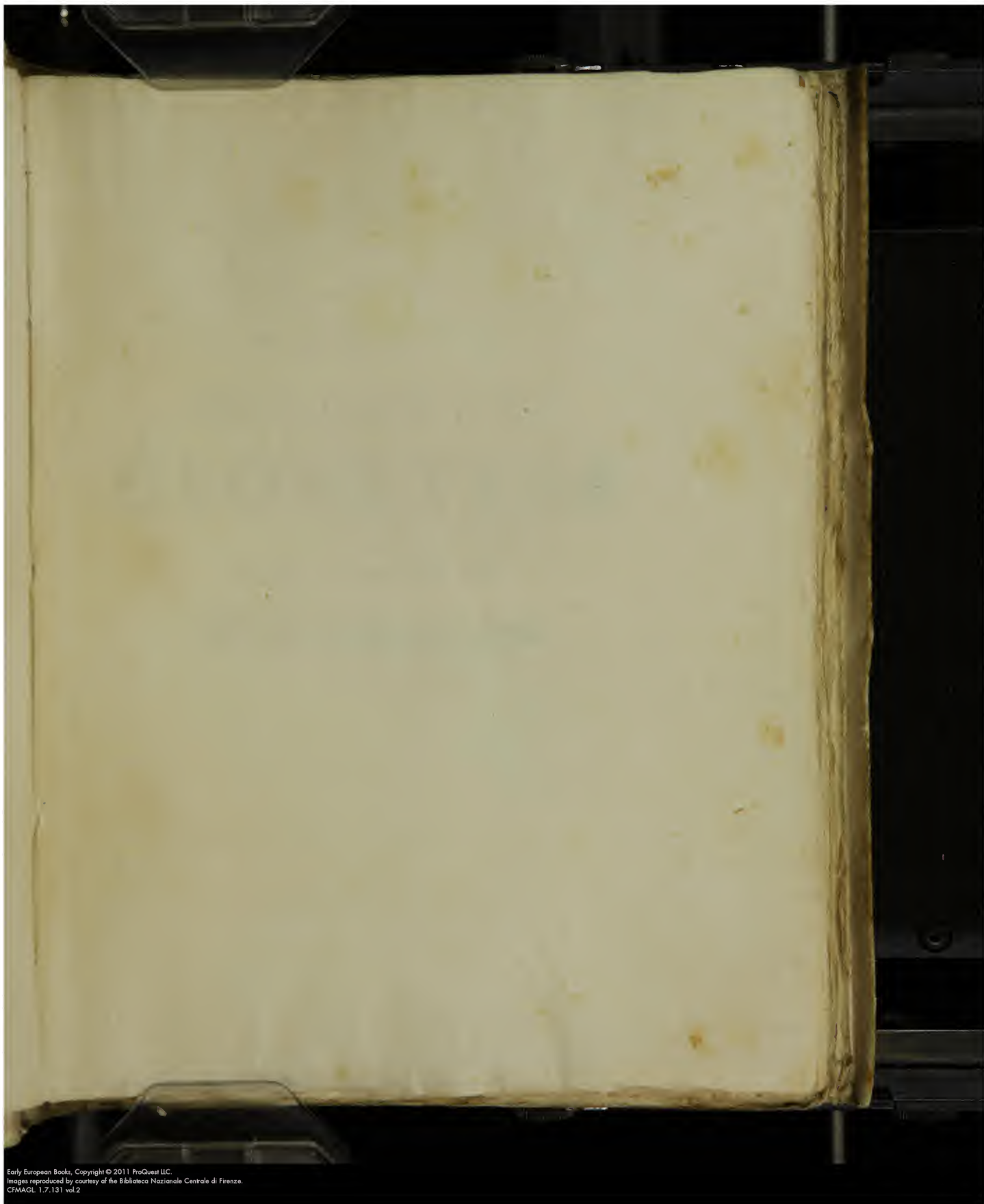
Early European Books. Copyright © 2011 ProQuest LLC.
Images reproduced by courtesy of the Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze.
CFMAGL 1.7.131 vol.2

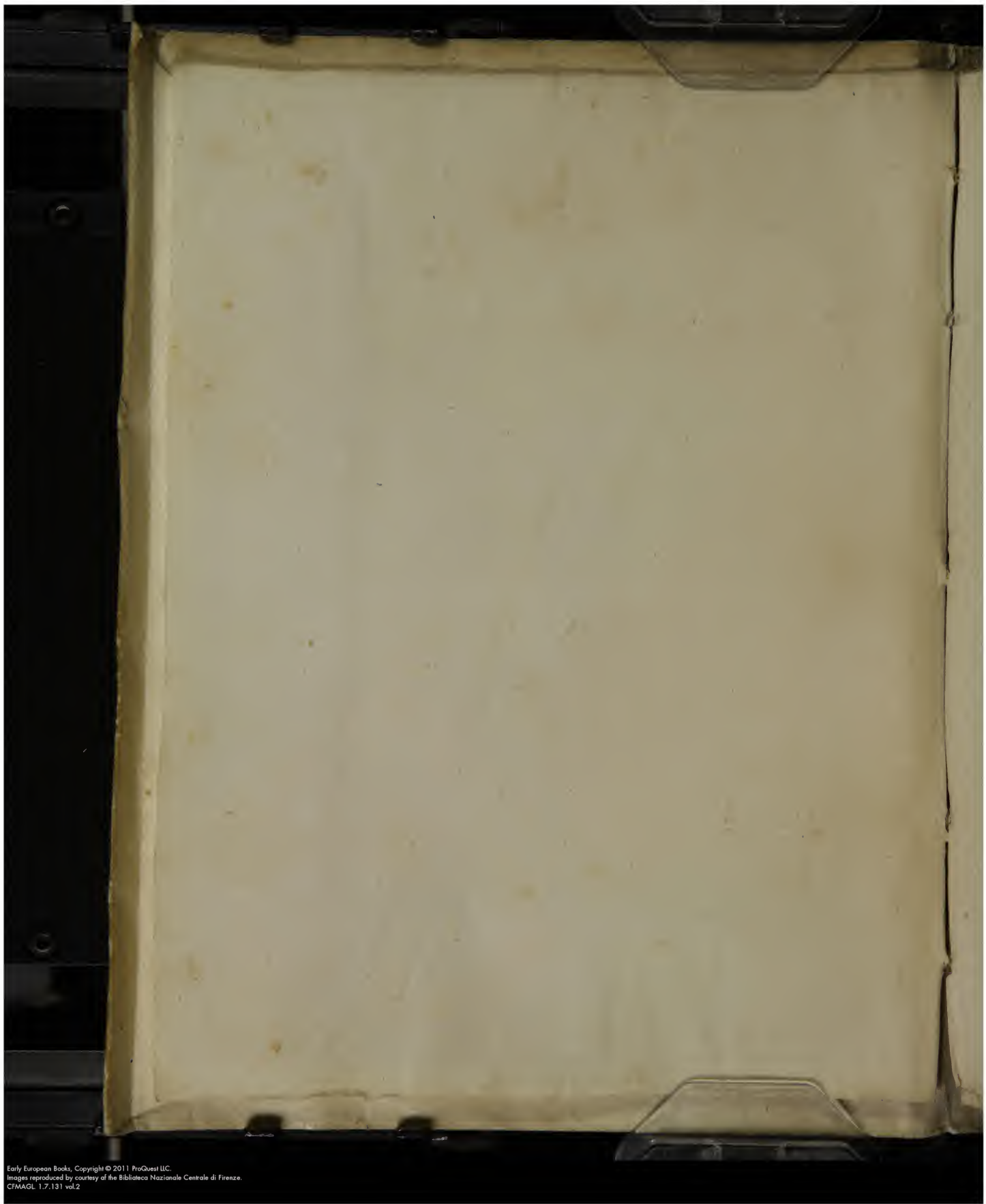
1. 7. / 31

1 H. 7

XI
CART.
Geom. 2^a
2







RENA TI
DESCARTES
GEOMETRIÆ
PARS SECUNDA.

Cujus contenta sequens pagina exhibebit.

C A T A L O G V S

corum,

Quae in hac secundâ parte continentur.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Mathe-
seos Universalis, seu Introductio ad CARTESIANÆ GEO-
METRIÆ Methodum. Conscrip̃ta ab ERASMO BARTHOLINO.

FLORIMONDI DE BEAUNE duo tractatus posthu-
mi. Alter de Natura & Constitutione, alter de Limitibus
Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Li-
nearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de con-
cinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Alge-
braico.

PRINCIPIA
MATHeseos
VNIVERSALIS,

SEV
INTRODUCTIO

AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES,

Conscrip̃ta ab

ER. BARTHOLINO, CASP. FIL.

Editio secunda, priore correctior.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
c15 156 LXL.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF
CHICAGO

1891

1891



1891

*Generis & virtutum Nobilitate Perillustri
& Generoso Heroi,*

D. CHRISTIANO THOMÆ,
TOPARCHÆ IN STAVGARD,
Equiti Aurato, Serenissimæ Regiæ Majestatis
Cancellario Magno, Regni Daniæ Senatori
primario, Regiæ Academiæ Hafniensis Con-
servatori summo, Patrono incomparabili.

NON minùs verè quàm ele-
ganter, Cicero lib. 1. Tusc.
quæst. Magni, inquit, est
*ingenii revocare mentem à sensi-
bus, & cogitationem à consuetudine abducere.*
Cum enim mens nostra, quam in no-
bis conclusam circumferimus, divina
quædam particula habeatur, nihil sa-
nè illi gratius accidere potest, quàm,
cùm contemplando à corporeis re-
bus laxatur, originique suæ quàm si-
millima redditur. Sensuum quippe
usurâ

E P I S T O L A

usurâ non minus fruuntur bruta animantia, quàm homines, imò, quædam longè nobis præstant; mente verò quia non gaudent, universam hanc mundi machinam, quasi tabulam pictam aspiciunt, nec cogitant quâ de causâ quòve modo tot varietates rerum sint ordinatæ. Quicunque igitur hominum non cupiunt semetipsos privare bono, quo reliqua animantia excedunt, non temerè permittent sese sensuum judicio ita mancipari, ut ea sufficere putent, quæ manibus quasi palpare possunt, ac pauca velint si non oculis omnium obvia, pauciora credant quæ sensus non approbant, & paucissima eligant, nisi ab experientia firmentur. Non equidem diffiteri possumus, hoc propositum utile esse atque necessarium, ut initio juvetur cogitatio nostra & intel-

D E D I C A T O R I A.

intellectus; unde factum est, quòd Geometræ figuras, Arithmetici numerorum characteres, aliique alia subsidia invenerint; Sed experimentis ejusmodi vix acquiescere debent magna ingenia, nec potest is, qui sapientiæ famam affectat. Communis enim experientia docet, multa facile mereri mentis assensum, & esse verissima, etiamsi sensuum judicio pro veris non agnoscantur: & vice versa, sensus quædam approbare; quæ, quia falsa, ratio nullo modo admittere potest. Atque hæc licet omnibus in confesso sint, non desunt tamen, qui nihil nisi Praxin amantes, Theoriam & speculationes omnes odio prosequuntur, atque ut inutilia eliminant: quos pertinaciæ suæ serò nimis pœnitebit, cum aliorum imperio ita subjecti esse coguntur, ut ne

E P I S T O L A

in Praxi quidem solita obstacula removere sciant, nec unquam novicquam addiscant, nisi quod vel casus ipsis, vel aliorum humanitas supeditaverit. At alii, quorum animus longius exspatiatur, & demonstrationes causasque inquirunt, utilia multa inveniunt, quæ ab aliis ignorantur; adeoque in Praxi multa excogitantes compendia, allaborant ut tædia & impedimenta obvia tollantur; quorum tamen inventa non essent repudianda, etiamsi humani ingenii imbecillitas, aut usus raritas, ea statim ad praxin revocare prohiberet. Hinc non contenti doctiores iis, quæ à Geometris aut Arithmeticis demonstrata atque inventa sunt, quæque usus dudum confirmavit, nisi vel ipsas demonstrationes penetrare, easdemque invenire possint; adeoque super-

D E D I C A T O R I A .

superflua rescindere, defectus supplere, & deperdita restituere queant. Neque enim existimandum est, majores nostros omnem posteris præripuisse materiem, quâ excolatur ingenium; cum contra socordiae meritò nos incusarent, si plus temporis in scriptis suis etiamnum intelligendis impendi, quàm ipsi in incognitis inveniendis posuere, viderent. Ad quæ invenienda cum non aliâ viâ, (quantum constat) quàm quæ per compositionem & resolutionem procedit, uterentur, quæque naturalis potius ingenii facultas aut industria, usu & exercitatione potita, quàm ars certis legibus & præceptis contenta, dici meretur; Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, cujus principia tradit hoc opusculum. quæ postquam innotuit,
lon-

EPISTOLA

longè plura & majora, quàm ab Antiquitate nobis relicta sunt, in lucem prodire. Non patitur tempus & lex scribendi, ut commemorem, quanta ex hac arte, non tantum ad Arithmeticam, Geometriam, Mechanicam, sed etiam Opticam aliasque scientias manaverint emolumenta. Nihil enim sani antehac de visu novimus, cum omnia hinc, sicut in aliis artibus, quæ materiæ immersæ, non abstrahuntur à sensibus, ad directionem mentis, disputationibus huc illuc trahebantur; jam omnia determinata, omnia demonstrationibus munita. Qui enim in Opticis non planè hospites sunt, sat sciunt, quàm incerta, quamque defectuosa fuerint ea, quæ de Refractionum legibus antea novimus, & quàm falsa illa determinatio figuræ vitrorum, (de quibus
Dio-

DEDICATORIA.

Dioptrica agit) quâ nihil jam nobis
optari potest perfectius, nihil certius.
sed de his forsan aliàs. Id mihi in præ-
sens sufficit, hanc artem sibi proprio
jure vendicare non solum ea, quæ de
Matheseos utilitate, deque Arithme-
ticæ, Geometriæ, Astronomiæ, &
Musicæ præstantia, tot rationibus,
tot voluminibus, totque seculis dicta
sunt, sed & multò plura; quod facile
demonstrare possem, nisi plurimis,
qui hæc penitus introspicere dignan-
tur, notum id fore scirem. Nec opus
mihi est, multa coram Te, Heros Per-
illustris, de hujus artis totiusque Ma-
theseos utilitate dicere: quoniam,
dum animus tuus magna semper &
excelsa meditatur, Mathematicas e-
tiam scientias coluisti & amplexus es,
nihilque Tibi ad sapientiæ comple-
mentum deesse voluisti. Sed malo de

★ ★

He-

E P I S T O L A

Heroïcis & eximiis tuis virtutibus tacendo, publicum omnium testimonium implorare, quàm in præsens pauca dicere. Ars sanè Analytica perspectum habet, cujus viri præsidium expectat, cùm implorat tuum: nec enim Daniæ unquam, quamdiu Mathesis aliæque artes liberales tales invenerint Patronos, vel virtus vel sapientia deficiet. Patere igitur, Heros Perillustris, nomini tuo Principia hæc inscribi, & fructum inceptæ peregrinationis serenâ fronte accipe. Tui enim nominis clypeo munita, frontem audent obvertere hostibus, quibus seculum hoc abundat, quique varia tela in obvios effundere non verentur, prout affectus malevoli ipsis dictaverint. Solent plerique, qui rodere amant, objicere, pervulgata omnia esse & ex aliis desumpta; quâ censurâ
quam-

DEDICATORIA.

quamquam sciam hoc scriptum non posse notari; tamen præfagit animus, fore, ut hæc tanquam inutilia & nimis curiosa rejiciant. Si enim intellexerint, hoc ambitu, etiam Algebram complecti; fastidio commoti, subtilitates ejus cane pejus & angue fugient. Sed vix metuet sibi Ars Analytica à talibus hostibus, nam, cum doctissimis quibusque Mathematicis, quibus sæculum hoc quasi superbit, probetur, de reliquis ipsi minus est laborandum: nec ulla alia hujus Methodi defensio requiritur, nisi quàm experientia, & ipsius rei intellectæ usus attulerit. Et, ut verba in pauca conferam, si tuo exactissimo limatissimoque judicio probentur, nullius in posterum censuram aut notam pertimescent. Neque ego exilitate operis deterritus, sed contra utilitate po-

EPISTOLA DEDICATORIA.

tius instigatus , Tibi hæc consecrare sum veritus : & quidem tantâ majore fiducia , & spe certiore , quantò certius mihi constat Te omnibus iis, qui inter bonas artes etiam Mathematicis incumbunt , favere ; quem favorem quotidie familia nostra sentit , & grato animo semper recolit. Vale regni Daniæ decus , & æqui bonique consule hoc grati animi monumentum, quod humillimè offert

PERILLVSTRIS GENEROSITATIS
TVÆ

*Scribebam Leida,
Anno clō Ioc l.
Calend. Iun.*

Devotissimus & obsequen-
tissimus cliens

ERASMIUS BARTHOLINUS.

L E

LECTORI S.

Cum omnes sapientes audire velint, & nihil tam temerarium tamq̃ indignum sapientis gravitate atque constantia sit, quàm aut falsum sentire, aut quod non satis exploratum sit, sine ulla dubitatione defendere: nescio quo fato fiat, quòd non operam dent ejusmodi studiorum viam ingredi, quâ mens adsuescat verum à falsis & dubiis distinguere. Quandoquidem enim à teneris adsuescere multum est, egregie sibi consulerent, si ad Mathematicam excolendam ab incunte atate animum appellerent. Mathematicas autem disciplinas hanc præ aliis habere prærogativam, vix dubitari potest, modo consideretur, quicquid in iis concluditur & determinatur, id omne ex præmissis necessitate quadam sequi: vel verum, vel dubium, vel falsum, prout præmissa variis modis sese habuerint: Adeò ut, etsi non aliis usibus inferviret Mathesis, tamen vel hoc nomine, ad sui cognitionem trahere deberet etiam eos, quibus nullum aliud ex ea speraretur emolumentum. Quod cum abundè observatum & usu comprobatum sit à Veteribus, quos plerique nostra atate ita suspiciunt & venerantur, ut majus quoddam animo complexi, plus multo etiam vidisse videantur, quàm quantum nostrorum ingeniorum acies intueri potest; inter alia mirari subit, omnes ferè, exemplum illorum hac in re deseruisse. Quippe compertum est, antiquos Philosophos non permisisse, ἀνωμαλῆς σχολῆς ingredi, ut ad Sapientia studium admitterentur, quiq̃, ante non haberent Λαῖκας & Φιλοσοφίας. Quod sanè propositum, non ratione prudentius, quàm eventu feliciter fuit: cum hanc fuisse causam, quòd ad illam pertigerint scientiam, quam posteritas tantopere miratur, & quò virtute sua nonnulli eniti se posse desperant, conficiam. Frustra enim spectatur fructus disciplinarum, ab eo, qui earum altitudinem non metitur; nec in cacumen evadere potest, qui non solerter rimatur viam, & aditus, qui cò ferunt,

P R Æ F A T I O

negligit. *Mathesis* autem, cum ex notionibus simplicissimis, cognitiuq; facillimis, ad difficiliora atque remotissima quaeque cognoscenda perducatur juniores, qui praconceptis opinionibus vacui non impediuntur varietate rerum, quae animis profectionum inhaerent; non dubito, quin si ea à teneris imbuatur mens, ad aliarum quoque rerum, maximè compositarum atque obscuriorum, cognitionem sit penetratura. Et quoniam *Mathesis* variis partibus constat, quae omnes circa quantitatem versantur; res à nostri seculi Luminibus eò redacta est, ut generaliter illae omnes tractari, & quantitas haec in universali & abstracto per litteras Alphabeti concipi possit. Ita enim, facta ad omnes quantitatis species applicatione, intellectus ratiocinando ad varias res inveniendas distinctè progredi potest. Postquam autem Methodus illa diu latuit, tecta verborum involucris, cum quibus prius luctandum erat quàm fructus ullus sperari poterat; opportune nobis Nobilissimus D. Des-Cartes, insuperabilis ingenii Vir (qui, reclusa à se, haecenus incognita, ad veram sapientiam viâ, post tot seculorum fœdissimam servitutem, omnibus imitando exemplo, ita natura mysteria pandit, ut vera sapientia studium, humanarumq; scientiarum encyclopædia & perfectio, immaturâ ejus ac deplorabili morte, majorem nunquam jacturam facere potuerit) eam ad hanc facilitatem perduxit, ut, quod difficultatis reliquum est, non aliâ ratione quàm studio & diligentia evinci possit. Taceo hîc perfectionem, ad quam res Mathematicae hujus Methodi subsidio redegit: cum ipsarum testimonia non tantum inuitos laudumq; suarum detractores in illis palmam ei dare cogant, sed etiam quousque humanum ingenium in iisdem progredi quidvè prestare valeat determinent. Verum enimvero cum omnium magnarum rerum sicut arborum altitudo nos delectet, & radices stirpesq; non item: sic multi ad summa pervenire optarent, nisi in elementis harere opus haberent. atqui, quemadmodum illa altitudo sine radicibus, stirpibusq; esse non potest; ita illi frustra se in id fastigium recipi sperant, qui-

AD LECTOREM.

quibus cordi non est fundamenta fideliter jacere. Et cum antehac non edita sint ulla principia, quæ ad adyta hujus Methodi ducerent; quid mirum? si multi in ipso limine hæsitaverint, pluresq; quos, re inexperitâ, desperatio in fugam averterit. Etenim nec hujus Methodi Auctor, nec Doctissimi ejus Commentatores à semetipsis impetrare potuerunt, ut bonas horas, quas subtilioribus inventis dicaverant, in edendis, quæ viam ad hanc Methodum sternerent, impenderent. Cum itaque nihil hac in re, omnibus votis, tam à me ipso olim, quàm à multis hodie expetita, præstitum esse repererim: diu multumq; inter spem & metum hærens, dolui, tamdiu inter tot Mathematicorum monumenta ea desiderari, quæ ad scientiarum incrementa emunctioris naris homines necessariò requiri jam pridem ceciperunt. Ego sanè opportunitate mira, ante aliquot annos voti compos factus, postquam ad hæc oras, Academiam Illustrem, quæ Leida est, accessi, Vir Celeberrimus atque Doctissimus Franciscus à Schooten, Matheseos ibidem Professor publicus, me Artem Analyticam, hancq; Methodum, tam eximîâ fide docuit, ut ad perfectionem nihil mihi præter ingenium & propriam industriam defuisse crediderim. Quocirca sepositâ privati commodi æstimatione ut plures felicitatis hujus participes facerem, & quæ propriis usibus destinaveram, publici juris redderem, de elementis hisce, quibus inter alia imbutus eram, evulgandis, cogitare cæpi. Et licet vererer ne amicitia jura, quæ inter nos cum fide semper servari optabam, hac ratione violarem; tamen facilem mihi veniam sperabam, si non nisi officiosa fraude fallerem, quæ gloria ejus, qui se bono publico uni devovit, cedere, nec aliàs magis animum meum gratum testari posset. Ac ne primas quidem spes fortuna destituit; quippe ab ipso, qui nullum erga me benevolentia pignus atque indicium omittit, non modo veniam hujus Zeli impetravi, sed & eam humanitatem, ut omnia perlegere & examinare haud gravatus fuerit, lucemq; ingenii & consilii sui porrigere. Operis
brevis-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

brevitatem quod attinet, non est, quam displicere cuipiam putem: siquidem copiam exemplorum, quibus ad discendum nihil aptius, nullus (ut opinor) hic desiderabit; in quibus afferendis ejusmodi delectus est observatus, ut, quoad fieri potuit, in medium adducerentur ea, quæ vel in ipso Auctore, vel in ejus Commentatoribus reperiuntur: quæ ideo sparsim ita sunt disposita, ut, meo judicio, non alio loco melius intelligi, simulq; prædictis locis illustrandis inservire potuerint. in quem finem, in margine paginarum citationem additam esse apparebit. Adeo ut, quicumque tantum Arithmetica Species, cum in integris, tum in fractis perdidicerit, levigq; numerorum irrationalium notitiâ instructus, in allatis exemplis accuratè examinandis sese exercuerit, se non inutiliter tempus, ubi ad Geometriam Dⁿⁱ. Des-Cartes accesserit, consumpsisse experturus sit. Quin imò videbit januam reſeratam omni ei, quod ab Algebra & Analyſi Geometrica expectari poteſt: ideoq; ſe Matheſeos Vni-verſalis conſtitutionem animo comprehendiffe. neque enim exiſtimo, hiſce intellectis, opera pretium fore, Algebra vulgaris cognitionem ampliùs exoptare, licet levio-rem ejus notiti- am, vel ipſe D. Des-Cartes, antehac, ad ſua Geometria Methodum intelligendam, requiſiverit. Vale.

PRIN-

PRINCIPIA
MATHESIOS
VNIVERSALIS,

SEV
INTRODVCTIO

AD
GEOMETRIÆ METHODVM
RENATI DES CARTES.

DE LOGISTICA QVANTITATVM SIMPLICIVM.

CUM in omni Scientia, ad difficiliorum rerum cognitionem, utile sit à simplicissimis & cognitū facillimis ordiri; haud inconsultum fuerit, ad generalem atque facilem comprehensionem Mathematicarum Scientiarum, quæ omnes circa quantitatem versantur, ad ea primum attendere, quæ non aliquam ejus speciem excludere, sed eas, quocunque se habeant modo, sub certis notis cuique obviis repræsentare possint. Unde cum in universa illarum Scientiarum constitutione, licet diversa objecta respiciant, non nisi relationes siue proportioniones quædam, quæ in iis reperiuntur, considerentur; consentaneum est rationes atque proportioniones illas seorsim spectare, easque literis Alphabeti, utpote notis simplicissimis nobisque cognitissimis, insignire. Neque enim ratio ulla est, quo minus per a , b , c , &c. concipiantur magnitudines a , b , c , &c. quàm pondera aut numeri iisdem characteribus designati. Attamen quia tum phantasie tum sensibus ipsis, nihil simplicius nec distinctius exhiberi posse occurrit, quàm rectæ lineæ, quæque relationes & proportioniones, quæ inter omnes alias res inveniuntur, exprimere valent: præstat

Vide dissertationem de methodo, parte secunda.

A

stat per prædictas literas solummodo lineas rectas concipere. Hinc si duæ fuerint quantitates designatæ per a & b , intelligentur per ipsas duæ differentes lineæ rectæ, diversæ scilicet longitudinis: ita ut per a intelligatur longitudo seu quantitas unius, & per b longitudo seu quantitas alterius. Non secus atque per a & a , aut per b & b duæ intelliguntur lineæ æquales; nisi indicaveris supposuérifve a esse æqualem ipsi b , vel a & b ejusdem esse valoris, id quod sic denotatur $a \propto b$. Et sic de aliis.

Cum autem non rarò occurrat, ut linea aliqua sit aliquoties sumenda, oportet tantum numerum convenientem ipsi literæ præfigere: Ut ad designandum, lineam a esse bis sumendam, scribo $2a$. Sic & ad designandum duplum, triplum, quadruplum &c. ipsius b , scribo $2b$, $3b$, $4b$ &c. Nec aliter fit si ad designandum semissem, tertiam aut aliam quamcunque partem lineæ a , scribatur $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{3}a$, &c. id quod etiam hoc pacto fieri solet $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, &c. sic & duas tertias, tres quartas, &c. ipsius b , ita designaveris $\frac{2}{3}b$, $\frac{3}{4}b$: vel sic, $\frac{2b}{3}$, $\frac{3b}{4}$, atque ita de aliis.

Jam cum in universa Mathesi operationes omnes ad quinque diversas (vulgò Species dictas) reduci possint, quæ sunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Divisio, & Radicum extractio; consequens est ut ostendatur, quâ ratione dictæ operationes per literas sint instituendæ.

De Additione quantitatum simplicium.

Igitur ad addendum lineam a ad lineam a , scribo pro summa $2a$: sic & ad addendum $2b$ ad $3b$, scribo $5b$. Lineæ enim eisdem literis si denotantur, oportet tantum numeros præfixos addere, & summam eidem literæ præfigere. Si verò diversæ fuerint, additio fiet interposito signo $+$, quod denotat plus. Ut si ad lineam a sit addenda linea b , scribo $a+b$, hoc est, a plus b , quo incidatur b esse additam ipsi a , vel adhuc esse addendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, seu quæ priori addi debet.

Nec aliter fit, si plures in unam summam sunt colligendæ. Ut ad addendum $2b$, b , & $3b$, scribo $6b$. Sic & ad addendum a , b , & c , scribo $a+b+c$.

Exem-

Exempla additionis simplicium.

$$\begin{array}{r} \text{Add. } \begin{array}{l} a. \\ a. \end{array} \quad \begin{array}{l} 2b. \\ 3b. \end{array} \quad \begin{array}{l} 3d. \\ d. \end{array} \quad \begin{array}{l} 2b. \\ b. \end{array} \\ \hline \text{Summa } 2a. \quad 5b. \quad 4d. \quad 6b. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Add. } \begin{array}{l} a. \\ b. \end{array} \quad \begin{array}{l} a. \\ 2b. \end{array} \quad \begin{array}{l} 3c. \\ 4d. \end{array} \quad \begin{array}{l} b. \\ c. \end{array} \\ \hline \text{Summa } a+b. \quad a+2b. \quad 3c+4d. \quad a+b+c. \end{array}$$

Ubi notandum, in additione literarum d & $3d$, cogitandum esse literam d sibi præfixam habere unitatem: id quod etiam in sequenti exemplo & similibus est observandum: ut &, cum plures adduntur diversæ literæ, perinde esse quo ordine scribantur, ut $a+b$, vel $b+a$.

De Subtractione quantitatum simplicium.

Iam verò ad subtrahendum lineam $2a$ à linea $5a$, scribendum est $3a$: siquidem lineæ, quæ iisdem literis sunt designatæ, subducuntur, subtrahendo tantum à se invicem numeros præfixos. Sic & si $2b$ auferantur à $3b$, reliquum erit $1b$ seu b . Similiter sublato d de $4d$, relinquitur $3d$: At a de a manet 0 seu nihil.

Quòd si verò lineæ diversis literis notatæ fuerint, subductio fiet interposito signo $-$, quod denotat minus. Ut si ab a subtrahenda sit b , scribo $a-b$, hoc est, a minus b , quo indicatur b esse sublata ex a , vel adhuc esse subducendam. Ubi patet dictum signum semper esse referendum ad sequentem literam, hoc est, quæ ex priori est subtrahenda.

Eodem modo, sublatis $4d$ ex $3c$, reliquum erit $3c-4d$.

Exempla subtractionis simplicium.

$$\begin{array}{r} \text{Ex } 5a. \quad 3b. \quad 4d. \quad a. \quad \text{Ex } a. \quad 3c. \quad a. \quad 2c. \\ \text{subtr. } 2a. \quad 2b. \quad d. \quad a. \quad \text{subtr. } b. \quad 4d. \quad 4b. \quad d. \\ \hline \text{reliq. } 3a. \quad b. \quad 3d. \quad 0. \quad \text{reliq. } a-b. \quad 3c-4d. \quad a-4b. \quad 2c-d. \end{array}$$

Unde notandum, in ejusmodi quantitatum subtractione, oportere quantitatem illam, quæ ex alia subtrahi debet, esse minorem: hoc

hoc est, ad subtrahendum b ex a , (ut in superiori exemplo) opus esse, ut b sit minor quàm a . Quòd si autem non proponatur aut constet, utra quantitas sit major aut minor, & tamen subductio fieri debeat; differentia earum denotari poterit hoc modo: $a=b$, hoc est, $a-b$ vel $b-a$.

De Multiplicatione quantitatum simplicium.

P Orrò ad multiplicandum lineam a per lineam b , scribo $a b$ vel $b a$. Sic & ad multiplicandum a per a , hoc est, a in se, scribo $a a$ seu a^2 : & $a a a$ seu a^3 ad prædictum productum $a a$ adhuc semel multiplicandum per a . Aded ut literæ immediatè sese consequentes, multiplicationem earum per invicem factam, vel adhuc faciendam esse, indicent. Non secus, si multiplicare velim a , b & c per invicem, scribo $a b c$, vel $b a c$, vel $c b a$ & c: & $a b b$ seu $a b^2$ vel $b^2 a$, ad multiplicandum a , b , & b . Hic enim, ut in additione, non refert, quo ordine scribantur.

Quemadmodum verò ex ductu alicujus numeri in se, id quod producit vocatur Quadratum ejusdem numeri, & si productum illud adhuc semel per eundem numerum multiplicetur, productus numerus appellatur ipsius Cubus, atque ita deinceps; ita quoque si a multiplicetur per a , productum $a a$ seu a^2 appellari consuevit a quadratum, seu a duarum dimensionum; & si $a a$ rursus multiplicetur per a , producet $a a a$ seu a^3 , quod ideo appellari poterit a cubus, seu a trium dimensionum: atque ita a^4 , a^5 , a^6 , & c. dici poterunt a quadrato-quadratum, a surdesolidum, a quadrato-cubus, & c. seu, a habens 4, 5, aut 6, & c. dimensiones.

Sicuti autem numerus aliquis, si in se ducatur, dicitur radix quadrata istius producti seu quadrati: & si adhuc semel per hoc productum multiplicetur, tum radix Cubica hujus posterioris producti appellatur, & c; sic & a dicitur radix Quadrata ex $a a$ seu a^2 , & radix Cubica ex a^3 , & radix Quadrato-Quadrata ex a^4 , & radix Surfolida ex a^5 , & radix Quadrato-Cubica ex a^6 , atque ita porro. Idem de reliquis est intelligendum.

Ex quibus constat diligenter esse notandum, quòd magnum sit discrimen inter aliquam quantitatem, cui numerus aliquis præfixus est, & inter eandem quantitatem, ubi idem numerus à tergo est adscriptus. Ut inter $2 a$ & a^2 , $3 a$ & a^3 , $4 a$ & a^4 , & c. siquidem
per

per 2 a , 3 a , 4 a , &c. simpliciter intelligitur quantitas a bis, ter, quater, &c. sumpta, hoc est, a sibi ipsi toties addita: at verò per a^2 , a^3 , a^4 , &c. Quadratum, Cubus, Quadrato-Quadratum, &c. ipsius a , hoc est, ipsa quantitas a toties posita & multiplicata.

Exempla multiplicationis simplicium.

Multipl.	a	a	aa	ab	ab	ab	aa	a^3 .
per	b	a	a	c	b	cd	ab	a^3 .
productum	ab .	aa .	a^3 .	abc .	abb .	$abcd$.	a^3b .	a^6 .

Ubi notandum in a^3b , producto multiplicationis quantitatum aa & ab , numerum ternarium quantitatem præcedentem a respicere, non autem sequentem b : quod, cum brevitatis causâ scribatur pro $aaab$, in omnibus similibus casibus quoque est intelligendum. Eâdem ratione, ad multiplicandum a^3 , hoc est, aaa per a^3 seu aaa , producet a^6 , hoc est, $aaaaaa$.

Quòd si quantitates occurrant multiplicandæ, quibus numeri, sive integri sive fracti, præfiguntur, oportebit dictos numeros in se invicem ducere, ut in vulgari Arithmetica, & eorum productum præfigere producto, quod exsurgit ex multiplicatione quantitaturn dictarum. Ut ad multiplicandum $2a$ per $3b$; multiplicatis 2 per 3 , provenit 6 , quod si præfigatur ipsi ab , producto quantitaturn a & b per invicem, erit quæsitum productum $6ab$. Similiter multiplicatis $2b$ per c , productum erit $2bc$. nam unitas, quæ hic ipsi c præfigi subintelligitur, ducta in 2 , producit 2 .

Nec aliter fit, si ad multiplicandum $3ab$, hoc est, ter ab per $2cd$, hoc est, bis cd , scribatur $6abcd$. Sic &, multiplicatis $\frac{1}{2}aa$ per $\frac{1}{3}ab$, hoc est, semisse ipsius aa per tertiam partem ipsius ab , productum fiet $\frac{1}{6}a^3b$, hoc est, $\frac{1}{6}aaaab$.

Exempla multiplicationis.

Multipl.	$2a$	$2b$	$\frac{1}{2}a$	$3ab$	$\frac{1}{2}aa$	a^3	$6a^3$.
per	$3b$	c	$\frac{1}{3}d$	$2cd$	$\frac{1}{2}ab$	$3b^3$	$\frac{2}{3}a^3$.
product.	$6ab$.	$2bc$.	$\frac{1}{2}ad$.	$6abcd$.	$\frac{1}{2}a^3b$.	$3a^3b^3$.	$4a^6$.

Ubi tandem sciendum, quòd licet ex multiplicatione producantur quantitates plurium dimensionum seu literarum; earum

A 3

tamen

tamen additionem atque subtractionem non aliter fieri atque præcedentium. Ut ad addendum $2ab$ ad $3ab$, scribitur $5ab$: & ad addendum $6ab$ ad $2bc$, scribitur $6ab + 2bc$. Non secus, ad subtrahendum $2ab$ de $3ab$, scribitur ab : & ad subtrahendum $2bc$ de $6ab$, scribitur $6ab - 2bc$. Et sic de aliis.

De Divisione quantitatum simplicium.

Quoniam verò divisio resolvit id, quod multiplicatio componit: facile apparet, ad dividendam quantitatem ab seu ba per a , opus tantum esse ex quantitate dividenda ab tollere quantitatem a , quæ divisor est, & pro quotiente scribere reliquam quantitatem b . Eodem modo, si dividatur aa per a , orietur a ; & aaa seu a^3 per a , orietur aa . Non secus divisâ abc per a , fiet bc : at per b , fiet ac : & per c , fiet ab .

Quod si verò quantitates dividendæ occurrant, quibus numeri sint præfixi; oportet, factâ divisione quantitatum, ut jam ostensum est, similiter dictos numeros dividere, ut in Arithmetica vulgari, & quod oritur invento quotienti quantitatum præfigere.

Exempla divisionis simplicium.

Divid. ab } b quot. a } a . a^2 } aa . abc } bc . abc } c . a^2b } aa . a^2 } a^2 .
per a }

Divid. $6ab$ } $3b$. a^2b } aa . $3a^2b^3$ } $1a^2$ seu a^2 . $3a^2b^3$ } $3b^3$.
per $2a$ }

Cum autem occurrunt quantitates dividendæ, ex quibus literæ divisoris præcedenti modo tolli nequeunt; subscribitur Divisor ipsi Dividendo interjectâ lincolâ, ad modum fractionis Arithmeticæ vulgaris. Ut ad dividendum ab per c , scribo $\frac{ab}{c}$, quo indicatur ab esse divisam per c , vel adhuc esse dividendam. Sic & ad dividendum a per b , scribitur $\frac{a}{b}$. similiter divisâ abc per de , quotiens erit $\frac{abc}{de}$. & sic de aliis. Quæ quidem quantitates sic divisæ appellantur Fractiones.

Est verò hîc obiter notandum, divisâ a per a , $2b$ per $2b$, similibusque, quotientem esse 1 : siquidem quævis quantitas se ipsam semel continet, ideoque per seipsam divisâ, unitatem profert.

DE

DE LOGISTICA QUANTITATVM COMPOSITARVM.

Explicatâ Simplicium quantitatum operatione, quoniam ex illarum additione & subtractione oriuntur quantitates, per signum + composita, aut per signum — disjuncta, (quæ communiter generali nomine Composita dicuntur); consequens est, ut harum quoque operationem deinceps ostendamus.

De Additione quantitatum compositarum.

Itaque ad addendum quantitates Compositas, iisdem literis notatas, oportet considerare signa + & —, quibus afficiuntur, & notare, si eadem fuerint, additionem fieri ut in simplicibus, & earum summæ præfigi idem signum. Ut ad addendum $a + 3b$ ad $a + 2b$: additis a ad a , & $3b$ ad $2b$, summa erit $2a + 5b$. Eodem modo $2a - b$ additum ad $3a - 3b$, facit summam $5a - 4b$.

Quod si verò signa diversa fuerint, subtrahendæ erunt quantitates eisdem literis denotatæ, sicut in subtractione simplicium, & ei quod relinquitur præfigendum est signum, quo major quantitas afficitur. Ut si addendum sit $3b + 5a$ ad $2b - 2a$: additis $3b$ ad $2b$, & subtractis $2a$ ex $5a$, summa erit $5b + 3a$. Similiter si $a + d$ addatur ad $a - 4d$, fiet summa $2a - 3d$. Ubi patet si $2b + a$ addatur ad $3b - a$, summam fore $5b$: quantitates enim $+a$ & $-a$, cum propter diversa signa sint subtrahendæ, se mutuò tollunt.

Item ad addendum quantitates diversis literis denotatas, oportet tantum eas suis signis connectere. Ut ad addendum $a + b$ ad $c - d$, scribo $a + b + c - d$: siquidem quantitas c , & omnis alia cui nullum præponitur signum, intelligitur sibi præfixum habere signum +.

Exempla additionis compositarum.

$$\begin{array}{l} \text{Add. } \begin{array}{l} 5a + 3b \quad 2a - b \quad \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}bb \quad a^3 - \frac{2}{3}abc \quad aa + 2a - 3. \\ 2a + 2b \quad 3a - 3b \quad \frac{1}{2}ab + \frac{1}{3}bb \quad \frac{2}{3}a^3 - \frac{2}{3}abc \quad aa + a - 6. \end{array} \\ \text{Summa } 2a + 5b. \quad 5a - 4b. \quad ab + bb. \quad \frac{1}{3}a^3 - 2abc. \quad 2aa + 3a - 9. \\ \text{Add. } \begin{array}{l} 3b + 5a \quad a + d. \quad 2b + a \quad aa - 2ab \quad 3a^3 - \frac{1}{2}aab \quad aa - 5a + 6. \\ 2b - 2a \quad a - 4d. \quad 3b - a \quad aa + ab \quad 2a^3 + \frac{1}{2}aab \quad aa + a - 6. \end{array} \\ \text{aggr. } 5b + 3a. \quad 2a - 3d. \quad 5b. \quad 2aa - ab. \quad 5a^3 + \frac{1}{2}aab. \quad 2aa - 4a. \end{array}$$

Add.

Add. $\begin{matrix} a+b & 2aa+3ab-bb & 3abc & a^3+2abb-aab+abc. \\ c-d & 5ab-3aa & a^3-abc & a^3+aab-3abb-b^3. \end{matrix}$
 Summa $\begin{matrix} a+b+c-d. & 8ab-aa-bb. & a^3+2abc. & 2a^3-abb+abc-b^3. \end{matrix}$
 seu aggr.

E quibus manifestum fit, (cum ad addendum $3b+5a$ ad $2b-2a$, scribi possit $3b+5a+2b-2a$, hoc est, $5b+3a$: siquidem $+3b$ & $+2b$ faciunt $5b$, & $+5a-2a$ faciunt $+3a$) quantitates eisdem literis denotatas, quando diversa habent signa, subtrahendas esse, & summæ ascribendum esse signum majoris quantitatis.

De Subtractione quantitatum compositarum.

POrro ad subtrahendum quantitates compositas, quæ eisdem literis sunt denotatæ, sciendum est: si signa eadem fuerint, & quantitas à qua subtractio fieri debet, major sit quantitate subducendâ; tum subtractionem fieri ut in simplicibus, & ei quod relinquitur præfigendum esse idem signum. Ut si subtrahatur $a+2b$ ex $2a+5b$: (subtractis a ex $2a$, & $2b$ ex $5b$), remanet $a+3b$. Non secus si subtrahatur $3a-3b$ ex $5a-4b$, reliquum erit $2a-b$.

Si verò signa eadem fuerint, & quantitas à qua subtractio fieri debet quantitate subducendâ minor sit; oportet, subtractâ minore ex majore, residuo signum contrarium præponere. Ut si subtrahendum sit $a+3b$ ab $3a+2b$: subtractis a ex $3a$, & $2b$ ex $3b$, residuum erit $2a-b$. Similiter, sublati $a-3b$ ex $2a-b$; relinquitur $a+2b$.

Quòd si quantitates iisdem literis designatæ, atque ad subtrahendum propositæ, diversa signa habeant; erunt ipsæ addendæ, ut in simplicibus, & summæ præfigendum signum quantitatis, à qua subductio fieri debet. Ut si velinus subtrahere $a-b$ ex $2a+b$: subtractis a ex $2a$, additisque b ad b , residuum erit $a+2b$. Eodem modo, $2a+5d$ subductum à $3a-2d$, relinquet $a-7d$.

Cæterum ad subtrahendum quantitates diversis literis denotatas, oportet quantitates subducendas, variatis signis connectere cum iis, à quibus subductio fieri debet. Ut si subtrahi debeat $c-d$ ab $a+b$; erit differentia seu residuum $a+b-c+d$: variatis nempe signis quantitatum c & d .

Exem-

Exempla subtractionis compositarum.

$$\begin{array}{r} \text{Ex } 2a+5b \quad 5a-4b \quad \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bb \quad a^3-\frac{1}{2}abc+\frac{1}{2}abb-b^3 \quad 2aa+3a-9. \\ \text{Subtr. } a+2b \quad 3a-3b \quad \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bb \quad \frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}abc+\frac{1}{2}abb-b^3 \quad aa+2a-3. \\ \text{Reliq. } a+3b. \quad 2a-b. \quad \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bb. \quad \frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}abc. \quad aa+a-6. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ex } 3a+2b \quad 2a-b \quad 2aa-ab \quad 5a^3+\frac{1}{2}aab-\frac{1}{2}abb \quad 3aa-2a+6. \\ \text{Subtr. } a+3b \quad a-3b \quad aa-2ab \quad 2a^3+\frac{1}{2}aab-abb \quad 2aa-3a+9. \\ \text{Resid. } 2a-b. \quad a+2b. \quad aa+ab. \quad 3a^3-\frac{1}{2}aab+\frac{1}{2}abb. \quad aa+a-3. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ex } 2a+b \quad 3a-2d \quad 8ab-aa \quad 3a^3-\frac{1}{2}aab+\frac{1}{2}abb-b^3 \quad 3aa-2a+6. \\ \text{Subtr. } a-b \quad 2a+5d \quad 2aa-3ab \quad -2a^3+\frac{1}{2}aab \quad aa+a-3. \\ \text{Diff. } a+2b. \quad a-7d. \quad 11ab-3aa. \quad 5a^3-aaab+\frac{1}{2}abb-b^3. \quad 2aa-3a+9. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Ex} \quad a+b \quad 2aa-4a \quad 3abc \quad a^3+aab-abb-b^3. \\ \text{Subtr.} \quad c-d \quad aa+a-6 \quad a^3-abc \quad aab-2a^3+c^3-abb. \\ \text{Rel. resid. seu diff. } a+b-c+cl. \quad aa-5a+6. \quad 4abc-a^3. \quad 3a^3-b^3-c^3. \end{array}$$

E quibus perspicuum sit (cum ad subtrahendum $a+3b$ ex $3a+2b$ scribi possit $3a+2b-a-3b$, hoc est, $2a-b$, subtractis nempe a ex $3a$ & $2b$ ex $3b$): quantitates eisdem literis denotatas, quando eadem habent signa, sed quantitates subducendæ aliis sunt majores, subtrahendas esse, & relicto præponendum esse signum contrarium.

Similiter, quoniam ad subtrahendum $a-b$ ex $2a+b$ scribere possum $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$, (subtrahendo videlicet a à $2a$, & addendo b ad b) patet, quâ ratione, quantitates eisdem literis designatæ, cum diversa habuerint signa, sint addendæ, & summæ præfigendum sit signum ejus, à quâ subtractio fieri debet. Quod autem subtrahendo $a-b$ ex $2a+b$, scribendum sit $2a+b-a+b$, variatis nempe signis quantitarum subducendarum, inde manifestum sit; quod ad subtrahendum a ex $2a+b$ differentia denotetur per $2a+b-a$, utpote subducendo quantitatem a , præponendo ei signum $-$, ut in subtractione simplicium est dictum: at quoniam subducendo quantitatem a ex $2a+b$, plus justo tollitur, siquidem non a absolute tollendum proponitur, sed diminuta quantitate b ; hinc fit, ut $2a+b-a$ minor sit quàm justa differentia, quantitate b : adeoque ad veram differentiam obtinendam, oportet addere quantitatem b , & scribere $2a+b-a+b$, hoc est, $a+2b$. Et sic de aliis

De Multiplicatione quantitatum compositarum.

Post hæc, ad multiplicandum quantitates compositas, operatio institui potest ad modum Arithmetice vulgaris: oportet enim earum partes multiplicare in se invicem, ut in simplicibus est ostensum, atque producta simul addere. Quod autem ad signa + & — attinet iisdem præfigenda, sciendum est: eadem signa (hoc est + per +, vel — per —) facere signum +, diversa verò (hoc est + per —, vel — per +) facere —. Ut ad multiplicandum $a + b$ per c : multiplicatis $+a$ per $+c$, & $+b$ per $+c$, fiunt $+ac$, & $+bc$: quibus additis, fit productum $+ac + bc$, seu $ac + bc$. Sic si multiplicandum sit $a - b$ per c , producat $ac - bc$.

Nec aliter fit, si ad multiplicandum proponatur $a + b$ per $c + d$: multiplicatis enim $a + b$ per c , ut ante; & rursus $a + b$ per d (si quidem $a + b$ non tantum per c , sed etiam per d multiplicari debet): fiet $ac + bc + ad + bd$. Non secus ad multiplicandum $a - b$ per $c - d$ scribitur $ac - ad - bc + bd$: multiplicatis nempe primum $a - b$ per $+c$, fit $+ac - bc$: deinde $a - b$ per $-d$, fit $-ad + bd$. quippe $+a$ per $-d$, producit $-ad$: at $-b$ per $-d$ producit $+bd$, juxta regulam. Et sic de aliis. Nec refert utrum à dextra an verò à sinistra initium fiat, sicut sequentibus exemplis manifestum fiet.

Exempla multiplicationis compositarum.

Mult. $a + b$	$a - b$	$a + b$	$a - b$	$a + b$
per c	c	$c + d$	$c - d$	$a + b$
prod. $ac + bc$	$ac - bc$	$ac + bc$	$ac - bc$	$+ab + bb$
		$+ad + bd$	$-ad + bd$	$aa + ab$
		product. $ac + bc + ad + bd$	$ac - bc - ad + bd$	$aa + 2ab + bb$
Multipl. $a - b$	$a + b$	$aa - 2ab + bb$	$aa - ab + bb$	
per $a - b$	$a - b$	$a - b$	$a + b$	
	$-ab + bb$	$aa + ab$	$-aab + 2abb - b^3$	$+aab - abb + b^3$
	$aa - ab$	$-ab - bb$	$a^3 - 2aab + abb$	$a^3 - aab + abb$
prod. $aa - 2ab + bb$	$aa - bb$	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$a^3 + b^3$	

Mult.

$$\begin{array}{r} \text{Mult.} \quad 3dd + 4de + ee \\ \text{per} \quad 3dd - ee \\ \hline 9d^2 + 12d^2e + 3d^2ee \\ - 3dde - 4de^2 - e^3 \\ \hline \text{product.} \quad 9d^2 + 12d^2e - 4de^2 - e^3. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Multipl.} \quad 4a^2 + 3aa - 2a + 1 \\ \text{per} \quad aa - 5a + 6 \\ \hline + 24a^2 + 18aa - 12a + 6 \\ - 20a^2 - 15a^2 + 10aa - 5a \\ + 4a^2 + 3a^2 - 2a^2 + 1aa \\ \hline \text{product.} \quad 4a^2 - 17a^2 + 7a^2 + 29aa - 17a + 6. \end{array}$$

Cæterum advertendum hic est, non rarò utile esse, multiplicationem hoc modo non instituire, sed tantummodo eam innuere interfirendo voculam *in* vel *M*. Ut ad multiplicandum $4a^2 + 3aa - 2a + 1$ per $aa - 5a + 6$, scribo $4a^2 + 3aa - 2a + 1$ in $aa - 5a + 6$, vel $4a^2 + 3aa - 2a + 1$ *M* $aa - 5a + 6$.

Quòd autem $+$ per $-$, vel $-$ per $+$ faciat $-$, sic patet. Esto $a - b$ multiplicandum per c , & sit $a - b \propto e$: hinc si utrobique addatur b , fiet $a \propto b + c$. Jam quoniam æquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideo si utrinque multiplicetur per c , erit $ac \propto bc + ec$, hoc est, auferendo utrinque bc , erit $ac - bc \propto ec$. Quocirca cum statuatur $a - b \propto e$, & utrâque parte ductâ in c , producat $ac - bc \propto ec$; perspicuum fit, $-b$ ductum in $+$, producere $-bc$.

Nec aliter ostendetur $-$ per $-$ multiplicatum producere $+$. Etenim si $a - b$ multiplicandum sit per $c - d$: ponendo, ut ante, $a - b \propto e$, erit productum ex $a - b$ in $c - d$ æquale producto ex e in $c - d$ vel $c - d$ in e : id est, $ce - de$. Sed ce , ut supra, æquatur $ac - bc$: unde $ac - bc - de$ æquabitur producto ex $a - b$ in $c - d$. Porro cum $a - b$ æqualis sit posita ipsi e , & utrâque parte ductâ in d , productum $ad - bd$ æquetur producto de : hinc si ex $ac - bc$ subtrahatur $ad - bd$ loco de , ei æquale; erit juxta regulam subtractionis $ac - bc - ad + bd$ productum queritum. E quibus liquet $-b$ multiplicatum per $-d$ producere $+bd$.

De Divisione quantitatum compositarum.

Praterea, ad dividendum quantitates compositas, operatio non absimilis erit ei, quâ in Arithmetica vulgari duo integri numeri per se invicem dividuntur. Quod autem signa + & — concernit, sciendum est, si dividatur + per +, aut — per —, semper oriri +; at si + per —, vel — per + dividatur, semper oriri —. omnino ut in multiplicatione. Operationem autem sive à dextra sive à sinistra incipias perinde erit. Ut ad dividendum $ac + bc$ per c : divisus $+ac$ per $+c$, & $+bc$ per $+c$, sunt ut in simplicibus est ostensum $+a$ & $+b$, unde quotiens quæsitus erit $a + b$. Similiter si dividatur $ac - cb$ per c , oriatur $a - b$: divisus enim $+ac$ per $+c$, fit $+a$, & $-cb$ per $+c$, fit $-b$. Non dissimili ratione dividitur $ac + ad + bc + bd$ per $c + d$, & fit $a + b$. Cujus operatio talis est.

$$\begin{array}{r}
 \text{Divid.} \quad ac + ad + bc + bd \qquad +ac \mid +a. +bc \mid +b. \\
 \text{per } c + d) \quad ac + ad + bc + bd \qquad +c \mid \quad +c \mid \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0}
 \end{array}
 \end{array}$$

Quotiens $+a + b.$

Diviso ac per c , (ut in simplicibus) fit a , scribendum sub linea in quotiente. hinc multiplicato divisore $c + d$ per quotientem inventum a , productum $ac + ad$ ex dividendo auferatur, scribendo partes ejusdem denominationis sub invicem, & reliquum sub linea infra ductâ. Unde cum subducto ac ex ac , & ad ex ad maneat nihil, scribitur sub linea ducta 0. Deinde diviso $+bc$ per $+c$, fit $+b$, ascribendum priori quotienti. unde multiplicato divisore $c + d$ per hunc quotientem b , fit productum $+bc + bd$. id quod si scribatur, ut ante, sub dividendo, & fiat subductio; erit pro reliquo sub linea scribendum 0. Et peracta erit divisio.

$$\begin{array}{r}
 \text{Eodem modo ad dividendum } ac - ad - bc + bd \qquad +ac \mid +a \\
 \text{per } c - d:) \quad ac - ad - bc + bd \qquad +c \mid \\
 \hline
 \begin{array}{cccc}
 \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0}
 \end{array}
 \end{array}$$

Erit quotiens $+a - b.$ $+bc \mid -b$
 $+c \mid$

Divido primùm ac per c , & fit a , scribendum sub linea in quotiente. Jam multiplicato divisore $c - d$ per $+a$, fit productum $ac -$

$ac - ad$, subducendum ex dividendo, & relinquitur 0. Deinde divido $-bc$ per $+c$, & oritur $-b$, sub linea scribendum in quotiente. Quoniam autem multiplicato divifore $c - d$ per $-b$, fit productum $-bc + bd$, & eo ex reliquo dividendi ablato, remanet nihil; patet divisionem esse ad finem perductam, & quotientem esse $a - b$.

Sic etiam ad dividendum $aa - 2ab + bb$ per $a - b$:

$$\begin{array}{r} aa - 2ab + bb \\ \underline{aa - ab} \\ 0 - ab \\ \underline{- ab + bb} \\ 0 \\ \hline \end{array}$$

fit quotiens $a - b$.

Divido primum aa per a , & oritur a , scribendum sub linea in quotiente. Unde multiplicato divifore $a - b$ per a , & ablato producto $aa - ab$ ex dividendo, scribendum erit reliquum $-ab$ sub linea ducta infra $-2ab$. Deinde divido $-ab$ per $+a$, & fit $-b$, scribendum sub linea in quotiente. Tum ducto divifore $a - b$ in $-b$, fit productum $-ab + bb$, quod sublatum à reliquo dividendi relinquit 0. Et erit operatio finita, ac quotiens quæsitus $a - b$.

Eadem ratione si dividendum sit $aa - bb$ per $a + b$.

Divid. $aa - bb$ | $-ab$ aa | a
 Divif. $a + b$ | $aa - bb$ | $-ab$ a |
 $\underline{0} \quad \underline{0} \quad \underline{0}$ $-ab$ | $-b$
 Quotiens $a - b$ $+a$ |

Incipiendo rursus à primo termino, divido aa per a , & habebitur a , scribendum sub linea in quotiente. Unde multiplicato divifore $a + b$ per quotientem inventum a , producet $aa + ab$, quod sublatum ex dividendo relinquet $-ab$: & quoniam hic terminus præter superfluum $-bb$ ad dividendum huc accessit, ideo post lineam ei adscribitur. Deinde divido $-ab$ (nempe id quod modò ad dividendum accessit) per $+a$, & habetur $-b$ in quotiente sub linea scribendum. Quo facto, si multiplicetur divifor $a + b$ per hunc quotientem $-b$, exfurret $-ab - bb$ ad subtrahendum ex eo, quod relinquitur in dividendo: quod cum post subtractionem

nein relinquat 0; liquet absolutam esse operationem, & quotientem fore $a - b$.

Nec aliter se res habet si dividatur $a^3 + b^3$ per $a + b$, & incipiat ab ultimo termino.

Dividend.	$a^3 + b^3$	$-abb$	$+aab$	b^3	bb
Divisor $a + b$)	$+a^3 + b^3$	$-abb$	$+aab$	b	
	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	$-abb$	$-ab$
	0	0	0	$+b$	
Quotiens	$+aa$	$-ab$	$+bb$	$+aab$	$+aa$
	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	$+b$	

Etenim diviso $+b^3$ per $+b$, fit $+bb$, scribendum in quotiente. tum ducto divisore $a + b$ in $+bb$, producitur $+abb + b^3$: Id quod si subtrahatur ex dividendo, relinquetur $-abb$. Deinde diviso $-abb$ per $+b$, oritur $-ab$, scribendum in quotiente, quo multiplicato per divisorem $a + b$ exsurgit $-aab - abb$, ad subtrahendum ex reliquo dividendi, eritque residuum $+aab$. Denique diviso $+aab$ per $+b$, prodibit $+aa$ scribendum in quotiente. unde si multiplicetur divisor $a + b$ per $+aa$, & productum $+a^3 + aab$ auferatur ex residuo dividendi, erit reliquum 0. Id quod ostendit, diviso $a^3 + b^3$ per $a + b$, oriri $aa - ab + bb$, quod erat faciendum.

Sequuntur adhuc nonnulla exempla ad uberiorem exercitationem divisionis compositarum.

Dividend.	$a^3 - 3aab + 3abb - b^3$	$-b^3$	$+bb$
Divisor $a - b$)	$+abb - b^3$	$-b$	
	$+2abb$	0	
	$-2aab + 2abb$	$+2abb$	$-2ab$
	$-aab$	$-b$	
	0	0	$+aa$
	$a^3 - aab$	$-b$	
	0	0	
Quotiens	$+aa - 2ab + bb$		

Divi-

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividend.} \quad 9d^3 + 12d^2e - 4de^2 - e^3 - 3ddee \\
 \text{Divif. } 3dd - ee \quad 3d^3 + 12d^2e - 4de^2 - e^3 - 3ddee \\
 \hline
 \text{Quotiens} \quad +4de + 3dd + ee
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividend.} \quad \frac{1}{2}a^3b + \frac{1}{2}a^2bb - a^2 - \frac{1}{2}a^3bb \\
 \text{Divif. } \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}aa \quad \frac{1}{2}a^3b + \frac{1}{2}a^2bb - a^2 - \frac{1}{2}a^3bb \\
 \hline
 \text{Quotiens} \quad +\frac{1}{2}abb + \frac{1}{2}aab + 2a^2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Divid.} \quad d^3 - b^3 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb - bd^3 + bdd - b^3d - aabd \text{ pag. 340.} \\
 \text{Div. } d+b \quad d^3 - b^3 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb - bd^3 + bdd - b^3d - aabd \text{ lin. 4.} \\
 \hline
 \text{Quotiens} \quad +d^2 - bdd + bdd - b^3 + 2aay + aad - aab.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 d^3 \quad -bd^3 \quad -bdd. \quad +bdd \quad +bdd. \quad -b^3d \quad -b^3. \\
 d \quad +d \quad +d \quad +d \quad +d \quad +d \quad +d \\
 +2aady + 2aay. \quad +aadd + aad. \quad -aabd \quad aab. \\
 +d \quad +d \quad +d \quad +d \quad +d \quad +d \quad +d
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Dividend.} \quad +y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \\
 \text{Divisor } y - 16 \quad +y^6 + 8y^4 + 4yy - 64 \\
 \hline
 \text{Quotiens} \quad +1y^4 + 8yy + 4.
 \end{array}$$

Divi-

Etenim ut a multiplicatum per a facit aa , seu a quadratum, cujus radix seu latus dicitur a ; sic & radice quadratâ extractâ ex aa proveniet rursus a . Similiter cum aa , hoc est, a quadratum multiplicatum per a producat a^3 seu cubum ex a ; ita etiam extractâ radice cubicâ ex a^3 , fiet a . Et sic de cæteris radicibus.

Nec aliter fit si ex quantitatibus compositis radix sit extrahenda. Sicut enim ex quantitatibus simplicibus radice extractio non secus se habet atque extractio radice ex aliquo numero, quæ tantum unius sit characteris: ita radix, quantitas existens composita, non aliter extrahetur, ac si ex aliquo numero radix, quæ pluribus constet characteribus, eliceretur.

Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $aa + 2ab + bb$: extraho primum radicem ex aa , & fit a , quæ in se multiplicata & ab aa ablata relinquit 0. Deinde multiplicato a per 2, divido $+2ab$

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum} \quad aa + 2ab + bb \\ \underline{aa + 2ab + bb} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \\ \text{Radix} \quad a + b \\ \text{Divisor} \quad 2a \end{array}$$

per 2 a , & fit $+b$: quod adscribo priori radici inventæ a . Hinc si ducatur 2 a in b , fit $+2ab$, quod sublatum ex $2ab$ relinquit 0. Similiter si multiplicetur b in se, fiet $+bb$; quæ itidem ex $+bb$ ablata, remanebit 0. Et operatio erit ad finem perducta, eritque radix quaesita $a + b$. Et sic de aliis.

Exempla extractionis radicum ex compositis.

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum} \quad a^2 - 2abb + b^2 \\ \text{Radix} \quad aa - bb \\ \text{Divisor} \quad 2aa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum} \quad 64xx - 16cx + 100 \\ \text{Radix} \quad 8x - 10 \\ \text{Divisor} \quad 16x \end{array}$$

C

Qua-

$$\begin{array}{r} \text{Quadratum } aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb \\ \hline aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Radix } a + c - b$$

$$\text{Primus divisor } 2a$$

$$\text{Secundus divisor } 2a + 2c$$

$$\text{Quadratum } aa$$

$$\text{Radix } a$$

$$a + c$$

$$\text{per } 2$$

$$2a + 2c. \text{ secundus divisor.}$$

$$\begin{array}{r} \text{per } 2 \quad a \quad a \quad - 2ab \quad - b \text{ quot. secundus.} \\ \text{Primus divisor } 2a \quad aa \quad + 2a \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 2ac \quad + c \text{ quotus primus} \\ + 2a \end{array}$$

$$2a + 2c$$

$$- b$$

$$\begin{array}{r} 2a \quad c \quad - b \\ + c \quad c \quad - b \\ + 2ac \quad cc. \quad + bb \end{array}$$

$$- 2ab - 2bc.$$

$$\text{Cubus } a^3 + 3aab + 3abb + b^3$$

$$\text{Radix } a + b$$

$$\text{Divisor } 3aa$$

$$+ 3aab \quad + b.$$

$$+ 3aa$$

$$\text{Cub. } 27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285xx - 150x + 125 \quad \text{Cub. } 27x^6$$

$$\begin{array}{r} 27x^6 - 54x^5 + 36x^4 - 8x^3 + 60xx - 150x + 125 \quad \text{Rad. } 3xx. \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \quad 0 + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \\ + 135x^4 - 180x^3 + 225xx \\ \hline \end{array}$$

$$3xx$$

$$3xx$$

$$9x^4.$$

$$\text{Radix } 3xx - 2x + 5.$$

$$\text{per } 3$$

$$\text{Primus divis. } 27x^4$$

$$- 54x^5$$

$$27x^4. 1. \text{div.}$$

$$\text{Secundus divisor } 27x^4 - 36x^3 + 12xx$$

$$+ 27x^4$$

$$- 2x \text{ quot. primus.}$$

$$- 2x$$

$$\begin{array}{r}
 -2x \quad -2x \quad 3xx-2x \\
 +27x^3 \quad -2x \quad -2x \quad 3xx-2x \\
 -2x \quad +4xx \quad +4xx \quad -6x^3+4xx \\
 -54x^3 \quad +3xx \quad -2x \quad 9x^3-6x^3 \\
 \quad +12x^3 \quad -8x^3 \quad 9x^3-12x^3+4xx \\
 \text{per } 3 \quad \text{per } 3 \\
 +36x^3 \quad 27x^3-36x^3+12xx. \text{Secund. div.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 +135x^3 \quad +5 \text{ quotus secund.} \quad +5 \quad +5 \\
 +27x^3 \quad +5 \quad +5 \quad +5 \\
 \quad +25 \quad +25 \\
 \quad +3xx-2x \quad +5 \\
 +27x^3-36x^3+12xx \quad +75xx-50x \quad +125. \\
 \quad +5 \quad \text{per } 3 \\
 +135x^3-180x^3+60xx. \quad +225xx-150x.
 \end{array}$$

Ceterum si quantitates, ex quibus radix extrahi debet, tales fuerint, ut radix prædicto modo inveniri non possit, designabitur ipsa præfigendo quantitatibus propositis signum $\sqrt{}$. Ut ad extrahendum radicem quadratam ex aaq , scribo \sqrt{aaq} ; quo indicatur radicem quadratam ex aaq esse extractam, vel adhuc esse extrahendam. Sic & $\sqrt{aa+bb}$ designabit radicem quadratam ex $aa+bb$.

Similiter ad extrahendum radicem cubicam ex aaq , scribo $\sqrt[3]{C.aaq}$. Ut & $\sqrt[3]{C.a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem cubicam ex a^3-b^3+abb . Quæ quidem radices vocantur quantitates Surdæ seu Irrationales, ad modum numerorum surdorum seu irrationalium, de quibus Arithmetici agunt.

Ubi notandum, signum $\sqrt{}$, vocari Signum Radicale, atque in genere usurpari ad denotandam quancunque radicem, sive Quadratam, sive Cubicam, sive Quadrato-quadratam, &c; sed ad illam distinguendam, communiter scribi \sqrt{Q} , vel etiam simpliciter $\sqrt{}$, ad denotandam radicem Quadratam: & $\sqrt[3]{C}$, ad denotandam radicem Cubicam: & $\sqrt[4]{QQ}$ seu $\sqrt[4]{}$, ad denotandam radicem Quadrato-quadratam, &c. quæ radices etiam sic designantur: $\sqrt{(2)}$, $\sqrt{(3)}$, $\sqrt{(4)}$, &c; atque ab aliis, hoc quoque pacto: $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, &c.

DE LOGISTICA FRACTIONVM.

Quandoquidem ex divisione quantitatum simplicium & compositarum ostensum est oriri Fractiones, sicut in Arithmetica vulgari, quarum operatio easdem leges sequitur atque numerorum fractionum vulgarium; satis erit, si suppositis horum regulis, illarum operationem exemplis exponamus.

Hinc, cum per fractionem quamlibet designetur semper divisionem aliquam esse faciendam, utpote illarum quantitatum, quæ numeratoris vicem gerunt, per quantitates, quæ pro denominatore habentur; facile constat, si numerator denominatori fuerit æqualis, tunc per fractionem illam designari unitatem. Ut $\frac{bb}{bb}$, $\frac{ab+bb}{ab+bb}$, & similes. Unde patet, quânam ratione unitas denotari possit in formam fractionis, cujus denominator sit is, qui requiritur.

Quod si verò ab , $aa-bb$, &c. in formam fractionis designare velinus, oportet tantum, assumpto ab & $aa-bb$, &c. tanquam numeratore fractionis, subscribere pro denominatore unitatem, hoc pacto: $\frac{ab}{1}$ & $\frac{aa-bb}{1}$, &c.

Porro si quantitas aliqua, ut a , designanda sit in formam fractionis, cujus denominator ea sit, quæ præscribitur, ut d , aut $a+b$, &c; oportet, multiplicato a per d , aut per $a+b$, scribere $\frac{ad}{d}$, aut $\frac{aa+ab}{a+b}$, &c.

Non aliter fit, si $a+\frac{aa}{d}$ sit redigendum ad formam unius fractionis. Etenim, multiplicato a per denominatorem d , addatur producto ad numerator aa , & summæ $ad+aa$ subscríbatúr denominator d , habebiturque $\frac{ad+aa}{d}$. Sic & $\frac{aa}{d}-a$ in formam unius fractionis reductum, facit $\frac{aa-ad}{d}$. Haud secus si $a+b+\frac{aa+bb}{a-b}$ reducatur ad fractionem, fiet $\frac{2aa}{a-b}$.

Cæterum notandum hîc, cum ad dividendum aa per bb , scribatur $\frac{aa}{bb}$ pro quotiente; ideo ad hunc quotientem sive fractionem $\frac{aa}{bb}$ multiplicandum per divisorem seu denominatorem bb , pro-

producto scribendum esse numeratorem aa . Non secus si $\frac{bb}{a-b}$ multiplicetur per $a-b$, productum erit bb . Unde patet ad multiplicandum $\frac{a}{2b}$ per $2ab$; quoniam multiplicato $\frac{a}{2b}$ per $2b$, productum est a ; superest tantum ut hoc productum adhuc multiplicetur per a , ut habeatur quæsitum productum aa . Similiter ad multiplicandum $\frac{1}{2}$ per $2ab$: cum multiplicato $\frac{1}{2}$ per 2 , fiat 1 ; hinc multiplicandum tantum restat 1 per ab , & fit productum quæsitum $1ab$ seu ab . Et sic de aliis.

De Reductione fractionum ad simplices.

I Am ad reducendum fractionem $\frac{aac}{cd}$ ad simpliciores; elisâ communi literâ c , quæ tam in numeratore quàm in denominatore repetitur, fiet $\frac{aa}{d}$. Sic & ad abbreviandum $\frac{abb}{abc}$: elisis literis a, b , numeratoris atque denominatoris, hoc est, diviso tam ab quàm abc per ab ; fiet $\frac{bb}{c}$.

Eodem modo ad abbreviandum $\frac{aac-aad}{cd-dd}$: quoniam diviso aac per cd , oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; hinc $\frac{aac-aad}{cd-dd}$ ad minores terminos reductum, erit $\frac{aa}{d}$.

Pari ratione ad reducendum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$: quia (ut supra) diviso aac per cd , oritur $\frac{aa}{d}$, id quod multiplicatum per $cd-dd$, producit $aac-aad$; & rursus $-bbc$ diviso per cd , oritur $-\frac{bb}{d}$, quod per $cd-dd$ multiplicatum producit $-bbc+bbd$; hinc $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{cd-dd}$ abbreviatum, facit $\frac{aa-bb}{d}$.

Sic & $\frac{a^6ccomm+4a^4ccmip}{ooppx^4+4mipx^4}$ abbreviatum, facit $\frac{a^6ccmm}{ppx^4}$.

pag. 214.
lin. 15.

Non secus $\frac{aac-aad-aed+add}{cd-dd}$ reducitur ad $\frac{aa}{d}-a$, vel

$\frac{aa - ad}{d}$. Nam $aac - aad$ divisum per $cd - dd$, facit $\frac{aa}{d}$; & $-acd + add$ divisum per $cd - dd$, facit $-a$.

Similiter si fuerit $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$: divido $a^3 - abb$ per $aa + 2ab + bb$, & relinquitur post divisionem $+ 2abb + 2b^3$ (nulla hinc quotientis $a - 2b$ habitâ ratione). Deinde divido $aa + 2ab + bb$ per reliquum $+ 2abb + 2b^3$, & fit quotiens $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$. Hinc cum perfecta sit divisio, & nihil remaneat, dividendus erit numerator $a^3 - abb$ & denominator $aa + 2ab + bb$ per $2abb + 2b^3$, Invenieturque $\frac{aa}{2bb} - \frac{a}{2b}$, pro numeratore,

& $\frac{a}{2bb} + \frac{1}{2b}$, pro denominatore.

hoc est, multiplicando ubique per $2bb$, habebitur $\frac{aa - ab}{a + b}$.

Nec aliter fit ad abbreviandum $\frac{a^3 - b^3}{aa - bb}$. Divisis enim $a^3 - b^3$ per $aa - bb$, relinquitur $abb - b^3$: dein $aa - bb$ per $abb - b^3$, fit quotiens $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, & perfecta est divisio absque reliquo. Quare si dividatur $a^3 - b^3$ & $aa - bb$ per $abb - b^3$,

fiet $\frac{aa}{bb} + \frac{a}{b} + 1$, pro numeratore.

& $\frac{a}{bb} + \frac{1}{b}$, pro denominatore.

Ideoque si ubique multiplicetur per bb , fiet fractio reducta $\frac{aa + ab + bb}{a + b}$.

Simili operatione reducitur $\frac{a^4 - b^4}{aa + ab}$ ad $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{a}$: Ut & $\frac{x^3 - 25x}{xx + 10x + 25}$ ad $\frac{xx - 5x}{x + 5}$. Et sic de aliis.

Ostensa igitur ratione, quâ fractiones ad simpliciores reduci possunt, superest ut explicemus, quo pacto datis duabus aut pluribus quantitatibus, siue simplicibus, siue compositis, inveniatur minima quantitas, quæ per ipsas sine reliquo dividi potest. id quod in sequentibus usum habere patebit. Est autem operatio similis ei, quâ secundum prop. 36. lib. 7. Elementorum Euclidis, datis duobus numeris, minimus invenitur numerus, qui per ipsos sine reliquo dividitur.

Ut;

Ut, ad inveniendum minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas aac & cd : constitutis aac & cd in formam fractionis, hoc pacto: $\frac{aac}{cd}$; reduco fractionem hanc ad ejus primitivam, seu simpliciore $\frac{aa}{d}$. Quibus juxta se positis, hoc modo: $\frac{aac}{cd} \times \frac{aa}{d}$, si multiplicatio insituetur per crucem, procreabitur eadem quantitas ex aac in d , atque ex cd in aa : fiet enim utrobique $aacd$, minima quippe quantitas, quæ sine reliquo dividi potest per aac & cd .

Sic & ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per duas datas $aac - aad$ & $cd - dd$; reduco (ut ante) fractionem $\frac{aac - aad}{cd - dd}$ ad ejus primitivam $\frac{aa}{d}$: Tum multiplicato $aac - aad$ per d , aut $cd - dd$ per aa , fiet quantitas quæ sita $aacd - aadd$. minima scilicet, quæ divisibilis est per $aac - aad$ & $cd - dd$.

Similiter si dentur $a^2 - b^2$ & $aa + ab$: quoniam $\frac{a^2 - b^2}{aa + ab}$ reducitur ad $\frac{a^2 - aab + abb - b^2}{a}$, & $a^2 - b^2$ multiplicatum per a facit $a^3 - ab^2$; erit $a^3 - ab^2$ quantitas quæ sita.

Eadem ratione si data fuerint $x^2 - 25x$ & $xx + 10x + 25$, erit quæ sita quantitas $x^3 + 5x^2 - 25xx - 125x$. Et sic de cæteris.

Quòd si verò compertum sit aut constet, duas illas datas quantitates ad simpliciores reduci non posse, sed primitivas esse; oportet unam per alteram multiplicare, ad inveniendam quantitatem quæ sita. Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $aa - ab$ & $a + b$: quoniam $\frac{aa - ab}{a + b}$ ad simpliciores terminos reduci nequit, multiplico $aa - ab$ per $a + b$, (cum secundum præcedentia scribendum foret $\frac{aa - ab}{a + b} \times \frac{aa - ab}{a + b}$), & fit quæ sita quantitas $a^3 - abb$.

Cæterum datis tribus aut pluribus quantitatibus, invenietur minima quantitas quæ per ipsas absque reliquo dividi potest, hoc modo: Ut ad inveniendam minimam quantitatem, quæ dividi potest per $a^3 - abb$, $aa + 2ab + bb$, & $aa - bb$: quæro primum, ut ante, minimam quantitatem, quæ dividi potest per $a^3 -$

$a^3 - abb & aa + 2ab + bb$, & fit $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$.
 quæ cum & dividatur per $aa - bb$, manifestum est $a^4 + a^3b - aabb - ab^3$ esse quantitatem quæsitam. Sic & si data fuerint
 $a^4 - b^4$, $aa + ab$, $a^4 + ab^3$, & $a + b$: inventâ primûm minimâ
 quantitate $a^5 - ab^4$, quæ dividi potest per duas $a^4 - b^4$ & $aa + ab$,
 (ut ante), quoniam ipsa dividi nequit per tertiam $a^4 + ab^3$: hinc
 ad $a^5 - ab^4$ & $a^4 + ab^3$ similiter aliam quæro, ut $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$.
 quæ cum hîc etiam divisibilis sit per
 reliquam $a + b$, patet $a^7 - a^6b + a^5bb - a^3b^4 + aab^5 - ab^6$
 esse quantitatem quæsitam. Et sic de cæteris.

*De Reductione fractionum ad eandem de-
 nominationem.*

Quibus explicatis, facile est ostendere, quâ ratione fractiones
 diversæ denominationis reducantur ad fractiones ejusdem
 denominationis. Ut ad reducendum fractiones $\frac{b^3d}{aac}$ & $\frac{a^3}{cd}$ ad ean-
 dem denominationem: quæro primûm minimam quantitatem,
 quæ dividi potest per denominatores aac & cd (ut jam est osten-
 sum), & fit $aacd$: quæ erit denominator communis. Jam ad in-
 veniendum numeratores, dividatur denominator inventus $aacd$
 per aac & cd , unumquemque scilicet ex denominatoribus datis,
 & quotientes d & aa multiplicentur per numeratores b^3d & a^3
 datarum fractionum, ut habeantur numeratores quæsitæ b^3dd & a^5 ,
 fiuntque fractiones quæsitæ $\frac{b^3dd}{aacd}$ & $\frac{a^5}{aacd}$.

Similiter ad reducendum $\frac{b^4}{aac - aad}$ & $\frac{a^3 + b^3}{cd - dd}$ ad eandem de-
 nominationem: invento denominatore communi $aacd - aadd$,
 minimâ nempe quantitate, quæ dividi potest per $aac - aad$ &
 $cd - dd$, divido $aacd - aadd$ per $aac - aad$ & $cd - dd$, &
 quotientes d & aa multiplico per numeratores b^4 & $a^3 + b^3$, fiunt-
 que fractiones quæsitæ $\frac{b^4d}{aacd - aadd}$ & $\frac{a^4 + aab^3}{aacd - aadd}$.

Eodem modo si $\frac{125}{x^3 - 25x}$ & $\frac{x - 25}{xx + 10x + 25}$ reducantur ad ean-
 dem denominationem, provenient $\frac{125x + 625}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$ &
 $\frac{x^3 - 30xx + 125x}{x^4 + 5x^3 - 25xx - 125x}$.

Non

Non secus $\frac{a^3}{a^2-b^2}$, $\frac{a^3-aa^2b}{a^2+ab}$, $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab^2}$, & $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$ redu-
 & sub eodem denominatore, facient

$$\frac{a^3-a^2b+aa^2bb-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2}{a^2-a^2b+aa^2bb-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2},$$

$$\frac{a^3-3a^2b+5aa^2bb-6a^2b^2+5aa^2b^2-3aa^2b^2+aa^2b^2}{a^2-a^2b+aa^2bb-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2},$$

$$\frac{a^3-a^2b+aa^2bb-a^2b^2-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2+bb^3}{a^2-a^2b+aa^2bb-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2}, \&$$

$$\frac{a^3-a^2b+2aa^2bb-2a^2b^2+2aa^2b^2-2aa^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2}{a^2-a^2b+aa^2bb-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2}.$$

De Additione & Subtractione fractionum.

ADditio & Subtractio fractionum eodem modo perficiuntur,
 atque additio & subtractio numerorum fractionum vulga-
 rium. Etenim si fractiones ejusdem fuerint denominationis, oportet tantum earum numeratores addere aut subtrahere, & summa vel reliquo subscribere denominatorem communem. Ut ad addendum $\frac{aa}{c}$ ad $\frac{bb}{c}$, summa erit $\frac{aa+bb}{c}$. Sic & $\frac{2ad}{d+e}$ additum ad $\frac{2ae}{d+e}$, facit $\frac{2ad+2ae}{d+e}$, seu $2a$. Non secus si addantur $\frac{bd}{b+d}$, $d + \frac{bb}{b+d}$, & $a - \frac{bd}{b+d}$, erit summa $a + \frac{2bd+bb}{b+d}$.

Quod si fractiones diversae denominationis fuerint, reducendae erunt prius ad eandem denominationem: quo facto, operandum erit ut jam dictum est. Ut ad addendum $\frac{125}{x^2-25x}$ ad $\frac{x-25}{xx+10x+25}$, fiet summa $\frac{x^3-30xx+250x+625}{x^4+5x^3-25x^2-125x}$.

Non secus si addantur $\frac{a^3}{a^2-b^2}$, $\frac{a^3-aa^2b}{a^2+ab}$, $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab^2}$, & $\frac{aa+ab+bb}{a+b}$, erit summa $\frac{4a^3-6a^2b+2aa^2bb-2a^2b^2+2aa^2b^2-2aa^2b^2+bb^3}{a^2-a^2b+aa^2bb-a^2b^2+aa^2b^2-a^2b^2}$.

Jam ad subtrahendum $\frac{aa}{c}$ de $\frac{bb}{c}$, scribo pro differentia $\frac{bb-aa}{c}$. Eodem modo subductis $\frac{2ae}{d+e}$ à $\frac{2ad}{d+e}$, reliquum erit $\frac{2ad-2ae}{d+e}$ seu $2a$. Similiter $\frac{bd}{b+d}$ de $d + \frac{bb}{b+d}$ relinquit $\frac{dd+bb}{b+d}$.

Nec aliter sit, si subtrahendum sit $\frac{b^2}{aa^2-aa^2d}$ de $\frac{a^3+b^3}{cd-dd}$. Etenim

nim reductis ad eundem denominatorem, si auferatur $\frac{b+d}{aacd-aadd}$ de $\frac{as+aab3}{aacd-aadd}$, relinquetur $\frac{as+aab3-b+d}{aacd-aadd}$. Sic & si tollatur $\frac{125}{x^3-25x}$ ex $\frac{x-25}{xx+10x+25}$, remanebit $\frac{x^3-30xx-625}{x^4+5x^3-25xx-125x}$.

Eâdem ratione ad subducendum $\frac{aa-ab}{a+b}$ de a , reductâ quantitate a ad denominatorem $a+b$, demptoque $\frac{aa-ab}{a+b}$ de $\frac{aa+ab}{a+b}$, fiet reliquum $\frac{2ab}{a+b}$. Non secus si subtrahatur $b + \frac{cc}{b+d}$ de $a+b$, relinquetur $a - \frac{cc}{b+d}$.

De Multiplicatione fractionum.

AD multiplicandum $\frac{ab}{c}$ per $\frac{de}{f}$, multiplico numeratorem ab per numeratorem de , ut & denominatorem c per denominatorem f (ad modum fractionum vulgarium), fitque productum $\frac{abde}{cf}$. Sic & $\frac{aa-bb}{c}$ multiplicatum per $\frac{2ab}{b+c}$ producit $\frac{2a^3b-2ab^3}{bc+cc}$.

Ad faciliorem autem operationem non raro convenit abbreviare quantitates per crucem. Ut ad multiplicandum $\frac{aac-aad-bbc+bbd}{aa+2ab+bb}$ per $\frac{a^3-abb}{cd-dd}$: quoniam $aac-aad-bbc+bbd$ & $cd-dd$ reducuntur ad simpliciores $aa-bb$ & d , ut & a^3-abb & $aa+2ab+bb$ ad $aa-ab$ & $a+b$; hinc loco multiplicandi $aac-aad-bbc+bbd$ per a^3-abb multiplico $aa-bb$ per $aa-ab$; & loco multiplicandi $aa+2ab+bb$ per $cd-dd$ multiplico $a+b$ per d : eritque productum $\frac{a^4-a^3b-aabb+ab^3}{ad+bd}$.

Porrò ad multiplicandum $aa-bb$ per $\frac{aa-ab}{a+b}$: substituto 1 pro denominatore ipsius $aa-bb$, quoniam numerator $aa-bb$ & denominator $a+b$ reduci possunt ad $a-b$ & 1, hinc multiplicatis numeratoribus inter se, ut & denominatoribus, fiet productum $\frac{a^3-2aab+abb}{1}$ seu $a^3-2aab+abb$.

Eâdem ratione cum multiplicatur $a + \frac{bb}{a-b}$ per $a-2b + \frac{bb}{a}$, hoc est, $\frac{aa-ab+bb}{a-b}$ per $\frac{aa-2ab+bb}{a}$: quoniam $aa-2ab+bb$ &

& $a-b$ reduci possunt ad $a-b$ & 1; hinc multiplicatis $aa-ab+bb$ per $a-b$, & a per 1, provenit $\frac{a^3-2aab+2abb-b^3}{a}$ seu $aa-2ab+2bb-\frac{b^3}{a}$.

Similiter si ad multiplicandum proponatur $\frac{xx-5x}{x+5}$ per $\frac{xx-25}{x}$: reductis $xx-5x$ & x ad $x-5$ & 1, itemque $xx-25$ & $x+5$ ad $x-5$ & 1, multiplico tantum $x-5$ per $x-5$, & fit productum $xx-10x+25$.

Præterea ad multiplicandum $a+\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$: quoniam a per $a-b$ facit $aa-ab$, & $\frac{bb}{a-b}$ per $a-b$ facit bb ; hinc productum quæsitum erit $aa-ab+bb$. Quâ quoque ratione multiplicabitur $\frac{aa-ab}{a+b}$ per $aa-bb$, & producet $a^3-2aab+abb$. cum enim $aa-bb$ fiat ex $a+b$ in $a-b$, & $\frac{aa-ab}{a+b}$ multiplicatum per $a+b$ producat $aa-ab$, superest tantum multiplicandum $aa-ab$ per $a-b$, ut habeatur $a^3-2aab+abb$.

Denique si multiplicandum sit $\frac{a^3-abb}{c-d-d}$ per $c-d$, fiet, divisio $cd-dd$ per $c-d$, productum $\frac{a^3-abb}{a}$.

De Divisione fractionum.

AD dividendum $\frac{a^3b}{c}$ per $\frac{bb}{c}$: omisso communi denominatore c , divido ab^3 per bb , fietque quotiens ab . Pari ratione si $\frac{a^3-abb}{c-d}$ dividatur per $\frac{aa+2ab+bb}{c-d}$, orietur $\frac{a^3-abb}{aa+2ab+bb}$ seu $\frac{aa-ab}{a+b}$.

Quod si denominatores fuerint diversi, reductio ad eandem denominationem fiet, si multiplicatio instituat per crucem, ut in vulgaribus. Ut ad dividendum $\frac{a^3-b^3}{a+b}$ per $\frac{aa-ab+bb}{c}$: quoniam multiplicato prioris numeratore a^3-b^3 per posterioris denominatorem c , & hujus numeratore $aa-ab+bb$ per illius denominatorem $a+b$, fiunt a^3c-b^3c & a^3+b^3 ; hinc quotiens erit $\frac{a^3c-b^3c}{a^3+b^3}$.

Advertendum autem hîc est, ad facilitatem operationis, fractionum numeratores, sicut etiam denominatores non rarò ad simpliciores terminos reduci posse. Ut ad dividendum $\frac{a^4 - b^4}{aa - 2ab + bb}$

per $\frac{aa + ab}{a - b}$: cum numeratores $a^4 - b^4$ & $aa + ab$ reduci possint ad $a^3 - aab + abb - b^3$ & a , & denominatores $aa - 2ab + bb$ & $a - b$ ad $a - b$ & 1; ideo loco multiplicandi $a^4 - b^4$ per $a - b$, multiplico $a^3 - aab + abb - b^3$ per 1, & fit $a^4 - aab + abb - b^3$; & loco multiplicandi $aa + ab$ per $aa - 2ab + bb$ multiplico a per $a - b$, & fit $aa - ab$. unde quotiens divisionis fit $\frac{a^3 - aab + abb - b^3}{aa - ab}$ vel $a + \frac{bb}{a}$. Eadem ratione si $\frac{x^4 - 625}{xx - 10x + 25}$ dividatur per $\frac{xx + 5x}{x - 5}$, orietur $\frac{x^3 - 5xx + 25x - 125}{xx - 5x}$. Nam $x^4 - 625$ & $xx + 5x$ reduci possunt ad $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & x , quin & $xx - 10x + 25$ & $x - 5$ ad $x - 5$ & 1, unde producta ex multiplicatione per crucem fiunt $x^3 - 5xx + 25x - 125$ & $xx - 5x$.

Porrò ad dividendum $a^3 - 2aab + abb$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$: substituto 1 pro denominatore dividendi $a^3 - 2aab + abb$, quoniam numeratores $a^3 - 2aab + abb$ & $aa - ab$ reduci possunt ad $a - b$ & 1; hinc multiplicatis $a - b$ per $a + b$ & 1 per 1, fiet quotiens $aa - bb$.

Sic & ad dividendum $aa + \frac{3abb}{a + b}$ per $a + b$, hoc est, $\frac{a^3 + 4aab + 3abb}{a + b}$ per $\frac{a + b}{1}$: divido $a^3 + 4aab + 3abb$ per $a + b$, & fit $aa + 3ab$, unde quotiens quæsitus fit $\frac{aa + 3ab}{a + b}$. Haud aliter, si dividatur $aa - ab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $a + b$. Et $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $xx + 5x$, orietur $\frac{1}{x - 5}$. Ac $a^3 - aab$ per $\frac{aa - ab}{a + b}$, orietur $aa + ab$. Et denique $\frac{xx + 5x}{x - 5}$ per $x + 5$, exsurget $\frac{x}{x - 5}$.

De Radicum extractione ex fractionibus.

CUM in Radicum extractione ex fractionibus radix ex numeratore & denominatore extracta exhibeat radicem quassitam: hinc si extrahenda sit radix quadrata ex $\frac{aabb}{cc}$, quoniam radix

dix quadrata ex $aabb$ est ab , & radix quadrata ex cc est c , scribo pro radice quaesita $\frac{ab}{c}$.

Eodem modo, si extrahatur radix quadrata ex $\frac{a^4 - 2aabb + b^4}{aa + 4ab + 4bb}$, fiet $\frac{aa - bb}{a + 2b}$. Pari ratione ad extrahendam radicem quadratam ex $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$: quoniam $4 + \frac{64xx - 160x}{25}$ in formam fractionis facit $\frac{100 - 160x + 64xx}{25}$, & radix quadrata ex $100 - 160x + 64xx$ est $10 - 8x$, & radix quadrata ex 25 est 5 ; erit radix quaesita $\frac{10 - 8x}{5}$ seu $2 - \frac{8x}{5}$.

Non secus radix cubica ex $\frac{27x^6 - 54x^5 + 171x^4 - 188x^3 + 285x^2 - 150x + 125}{x^3 - 9xx + 27x - 27}$ erit $\frac{3xx - 2x + 5}{x - 3}$.

Quod si quaesita radix praedicto modo ex numeratore atque denominatore extrahi nequit, praepositur datae fractioni signum radicale $\sqrt{}$. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $\frac{ccxx}{4bb} - ac$, scribo $\sqrt{\frac{ccxx}{4bb} - ac}$; vel quia $\frac{ccxx}{4bb} - ac$ in formam fractionis facit $\frac{ccxx - 4abbc}{4bb}$, & ex denominatore $4bb$ extrahi potest radix, quae est $2b$: ideo quaesita radix sic quoque scribi poterit $\sqrt{\frac{ccxx - 4abbc}{2b}}$. Similiter radix quadrata ex $\frac{aabb}{aa + bb}$, erit $\sqrt{\frac{ab}{aa + bb}}$. Idem de reliquis radicibus est intelligendum.

DE LOGISTICA QUANTITATVM SURDARVM.

Quemadmodum fractiones oriuntur ex divisione imperfecta quantitatum, quarum una per alteram sine reliquo dividi nequit: ita ex extractione radices quantitatum radicem non habentium exsurgunt quantitates Surdae, quarum operationem sequentibus exemplis exponere visum fuit.

De Reductione quantitatum surdarum.

Sciendum itaque, quod, sicut ad operationem fractionum diversae denominationis oportet prius ipsas ad eundem denominatorem

natores reducere, ita & opus sit, quantitates surdas, si diversa signa radicalia habuerint, reducere ad idem signum radicale. Quod fit, si ad numeros, à quibus radices denominantur, minimus inveniat numerus, qui per ipsos sine reliquo dividi possit. Ut ad reducendum $\sqrt{a q}$ seu $\sqrt{2 a q}$ & $\sqrt{C. a a q}$ seu $\sqrt{3 a a q}$ ad idem signum radicale: quæro ad 2 & 3 (numeros à quibus $\sqrt{2}$ & $\sqrt{3}$ denominantur) minimum numerum, qui per ipsos sine reliquo dividi potest, qui est 6. Jam cum 6 diviso per 2 oriatur 3, & per 3 diviso oriatur 2; hinc $a q$ multiplicandum erit in se cubicè, & $a a q$ quadratè; fientque sub eodem signo $\sqrt{2 C. a^3 q^3}$ seu $\sqrt{3 C. a^3 q^3}$, & $\sqrt{2 C. a^4 q q}$ seu $\sqrt{3 C. a^4 q q}$. Sic & $\sqrt{a b}$ & $\sqrt{a^3 b + a b^3}$ sub eodem signo radicali erunt $\sqrt{a a b b}$ & $\sqrt{a^3 b + a b^3}$.

Huc refer cum quantitas aliqua rationalis per multiplicationem in se reducitur ad aliquod signum radicale. Exempli gratiâ, ad reducendum $a + b$ ad idem signum radicis cum $\sqrt{a a + b b}$: oportet multiplicare $a + b$ in se quadratè, & fit $\sqrt{a a + 2 a b + b b}$. Non secus si multiplicetur $a + b$ in se cubicè, fiet $\sqrt{C. a^3 + 3 a a b + 3 a b b + b^3}$ sub eodem signo cum $\sqrt{C. a^3 - b^3 + a b b}$. Et sic de aliis.

Deinde sciendum, quantitates surdas non raro ad simpliciores reduci posse, tollendò ex signo radicali quicquid est rationale: nimirum, dividendo quantitates sub eodem signo $\sqrt{\quad}$ comprehensas per aliquod Quadratum, vel Cubum, &c. per quod multiplicatione fuerint productæ. Ut $\sqrt{75 a a}$ reduci potest ad $5 a \sqrt{3}$: nam $75 a a$ producit ex multiplicatione $25 a a$ per 3, quarum radices sunt $5 a$ & $\sqrt{3}$; adeò ut, si $75 a a$ dividatur per quadratum $25 a a$, sub signo radicali tantum scribendum fit 3, hoc modo: $5 a \sqrt{3}$. Id quod monstrat $5 a$, hoc est, $\sqrt{25 a a}$, multiplicatum esse per $\sqrt{3}$.

Eodem modo cum $a^3 b + a a b b$ dividi possit per quadratum $a a$, & oriatur $a b + b b$; fit ut pro $\sqrt{a^3 b + a a b b}$ scribi queat $a \sqrt{a b + b b}$.

Similiter quoniam $a^3 b - a a b b + 2 a a b c + a b c c - a b^3 + b b c c - 2 b^3 c + b^4$ dividi potest per quadratum $a a + 2 a c + c c - 2 a b - 2 b c + b b$, cujus radix est $a + c - b$, & quotiens est $a b + b b$; hinc

hinc loco $\sqrt{a^2b - aabb + 2aabc + abcc - ab^2 + bbcc - 2b^2c + b^3}$
scribi potest $a + c - b\sqrt{ab + bb}$.

Nonsecus pro $\sqrt{\frac{aaamm}{pp\zeta\zeta} + \frac{4aaam^3}{p^3\zeta}}$ scribi poterit $\frac{am}{p\zeta} \sqrt{oo + 4mp}$:
reducto enim ultimo termino ad eandem denominationem cum
priori, potest utriusque numerator dividi per $aaamm$, cujus radix
est am , oriturque $oo + 4mp$. Denominator autem cum sit ratio-
nalis, liberabitur à signo \sqrt , extrahendo radicem ex $pp\zeta\zeta$. Pag. 31,
lin. 9.

Eadem ratione loco

$\sqrt{C.x^6 - 9x^5 + 27x^4 - 15x^3 - 108xx + 324x - 324}$
scribi potest $x - 3\sqrt{C.x^3 + 12}$. Et sic de aliis.

Verum enimverò quoniam sæpenumero difficile est invenire
Quadratum, Cubum, &c. per quod divisio, ad hanc reductionem
necessaria, institui possit; non inutile fuerit, si hoc loco ostenda-
mus, quã ratione datarum quarumlibet quantitatum divisores
omnes inveniuntur, perinde atque in numeris est ostensum, vide
p. 300.

Dividantur datæ quantitates per quantitatem aliquam primiti-
vam (hoc est, quæ non nisi per unitatem aut se ipsam dividi po-
test), & rursus quotiens per hanc eandem sive aliam primitivam,
idque fiat donec perveniatur ad quantitatem aliquam primitivam,
quæ per se ipsam est dividenda. Ut ad inveniendum divisores
omnes quantitatis $a^2b + aabb$: divido $a^2b + aabb$ per a , & fit
 $ab + abb$, id quod rursus per a divisum dat $ab + bb$. Jam quia
quotiens hic per a amplius dividi nequit, divido $ab + bb$ per b ,
& provenit $a + b$, quæ quantitas est primitiva, ideoque per se
ipsam dividenda. Quibus peractis reserventur divisores $a, a, b,$
& $a + b$.

Ratio inve-
niendi divi-
sores omnes
quarum-
cunque da-
tarum
quantita-
tum.

$$\begin{array}{r|l} a^2b + aabb & aab + abb \\ a & a \\ \hline & ab + bb \\ & b \\ \hline & a + b \\ & a + b \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \\ \\ \\ 1 \end{array}$$

Jam ut ex hæc divisoribus inveniuntur divisores omnes quanti-
tatis $a^2b + aabb$, multiplico primum a per a , & fit aa . Deinde
 b per $1, a, & aa$, fiuntque $b, ab, & aab$. Denique multiplico $a + b$
per $1, a, aa, b, ab, & aab$, & fiunt $a + b, aa + ab, a^2 + aab,$
 $ab + bb, aab + abb, & a^2b + aabb$.

$$\begin{array}{r}
 \text{I.} \\
 \hline
 a. \quad a. \\
 \hline
 aa. \\
 \hline
 b. \quad ab. \quad aab.
 \end{array}$$

$$a + b. aa + ab. a^3 + aab. ab + bb. aab + abb. a^3b + aabb.$$

Atque ita divisores omnes erunt 1, a , aa , b , ab , aab , $a + b$, $aa + ab$, $a^3 + aab$, $ab + bb$, $aab + abb$, & $a^3b + aabb$.

Sic & ad inveniendum omnes divisores quantitatis $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$: divido $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$ per quantitatem primitivam $aa + bb$, & fit $a^4 - 3aabb + b^4$, id quod rursus divisum per quantitatem primitivam $aa + ab - bb$ dat $aa - ab - bb$, quæ quantitas etiam primitiva est, adeoque per se ipsam dividenda. Eruntque divisores reservandi $aa + bb$, $aa + ab - bb$, & $aa - ab - bb$.

$$\begin{array}{r}
 a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6 : a^4 - 3aabb + b^4 : aa - ab - bb : 1 \\
 aa + bb \quad aa + ab - bb \quad aa - ab - bb
 \end{array}$$

Ex quibus ut inveniatur divisores omnes quantitatis $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$: multiplico primum $aa + bb$ per $aa + ab - bb$, & fit $a^4 + a^3b + ab^3 - b^4$. Deinde 1, $aa + bb$, $aa + ab - bb$, & $a^4 + a^3b + ab^3 - b^4$ per $aa - ab - bb$, fiuntque $aa - ab - bb$, $a^4 - a^3b - ab^3 - b^4$, $a^4 - 3aabb + b^4$, & $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$.

$$\begin{array}{r}
 \text{I.} \\
 \hline
 aa + bb. \quad aa + ab - bb. \\
 \hline
 a^4 + a^3b + ab^3 - b^4.
 \end{array}$$

$$aa - ab - bb. a^4 - a^3b - ab^3 - b^4. a^4 - 3aabb + b^4. a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6.$$

Ita ut divisores omnes sint 1, $aa + bb$, $aa + ab - bb$, $a^4 + a^3b + ab^3 - b^4$, $aa - ab - bb$, $a^4 - a^3b - ab^3 - b^4$, $a^4 - 3aabb + b^4$, & $a^6 - 2a^4bb - 2aab^4 + b^6$.

Pag. 78.
lin. 12.

Eodem modo ut inveniatur divisores omnes quantitatis $a^6 + 2a^4cc + aac^4$: divido $a^6 + 2a^4cc + aac^4$ per a , & fit $a^5 + 2a^3cc + ac^4$, quod rursus per a divisum, dat $a^4 + 2aac^4 + c^4$. Jam cum hic quotiens dividi amplius non possit per a aut c similiternve quantitatem, divido $a^4 + 2aac^4 + c^4$ per $aa + cc$, vel, quod hic idem est, ex $a^4 + 2aac^4 + c^4$ extraho radicem quadratam

dratam $aa+cc$, quā denuo per seipsam divisā, provenit 1. Unde cum divisores reservati sint $a, a, aa+cc$, & $aa+cc$; ideo ut ex iis inveniantur divisores omnes quantitatis $a^6+2a^4cc+aa^2c^2$: multiplico primum a per a , & fit aa ; deinde $1, a$, & aa per $aa+cc$, fiuntque $aa+cc$, a^3+acc , & a^4+aa^2c : ac denique $aa+cc$, a^3+acc , & a^4+aa^2c per $aa+cc$, & fiunt $a^4+2aa^2c+c^2$, $a^5+2a^3cc+ac^2$, & $a^6+2a^4cc+aa^2c^2$; eruntque divisores omnes $1, a, aa, aa+cc, a^3+acc, a^4+aa^2c, a^5+2a^3cc+ac^2, a^6+2a^4cc+aa^2c^2$.

$$\begin{array}{r} a^6+2a^4cc+aa^2c^2 \quad a^5+2a^3cc+ac^2 \quad a^4+2aa^2c+c^2 \quad aa+cc \quad 1 \\ a \quad a \quad aa+cc \quad aa+cc \end{array}$$

1.

$a. \quad a.$

$aa.$

$$aa+cc. a^3+acc. a^4+aa^2c.$$

$$aa+cc. a^5+2a^3cc+ac^2. a^6+2a^4cc+aa^2c^2.$$

Similiter ad inveniendum divisores omnes quantitatis $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$: quia, facta divisione per b , oritur $a^3 - aab + 2aac + acc - abb + bcc - 2bbc + b^3$, & hujus quotientis per $a+b$, oritur $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$, & radix quadrata ex $aa - 2ab + 2ac - 2bc + cc + bb$ est $a+c-b$, hoc est, $aa - 2ab - 2ac - 2bc + cc + bb$ divisum per $a+c-b$, dat $a+c-b$; divido denum $a+c-b$ per $a+c-b$, & fit 1. Unde cum divisores reservati sint $b, a+b, a+c-b$, & $a+c-b$; multiplico b per $a+b$, & fit $ab+bb$: tum $1, b, a+b$, & $ab+bb$ per $a+c-b$, fiuntque $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbcc-b^3$: ac denique $a+c-b$, $ab+bc-bb$, $aa+ac+bc-bb$, & $aab+abc+bbcc-b^3$ per $a+c-b$, fiuntque $aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb$, $aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3$, $a^3+2aac+acc-aab-abb+bec-2bbc+b^3$, & $a^3b+aaab+2aabc+abcc-ab^3+bbcc-2b^3c+b^4$. Atque ita divisores omnes erunt $1, b, a+b, ab+bb, a+c-b, ab+bc-bb, aa+ac+bc-bb, aab+abc+bbcc-b^3, aa-2ab+2ac-2bc+cc+bb, aab+2abc+bcc-2abb-2bbc+b^3, a^3+2aac$
E $+acc$

+acc — aab — abb + bcc — 2bbc + b³, & a³b — aabb + 2abc
+ abcc — ab³ + bbcc — 2b³c + b⁴.

Non secus si proponatur $a^3bc - ab^3c$, invenientur ex divisoribus reservatis $a, b, c, a - b$, & $a + b$ diviso-
res sequentes: 1, $a, b, ab, c, ac, bc, abc, a - b, aa - ab, ab - bb, aab - abb, ac + bc, aac - abc, abc - bbc, aabc - abbc, a + b, aa + ab, ab + bb, aab + abb, ac + bc, aac + abc, abc + bbc, aabc + abbc, aa - bb, a^3 - abb, aab - b^3, a^3b - ab^3, aac - bbc, a^3c - abbc, aabc - b^3c$, & $a^3bc - ab^3c$.

Neque prætereundum hoc loco videtur, quo pacto horum divisorum ope duæ pluresve quantitates datæ aliâ ratione, quam ex superioribus faciliè fuit colligere, ad simplicissimos terminos reduci queant. Ut ad reducendum $a^3 - abb, aab - b^3$, & $a^3 + aab - abb - b^3$ ad terminos simplicissimos, eandem cum ipsis rationem habentes; quæro primò (ut ante) omnes cujusque quantitatis datæ diviso-
res: eruntque ipsius $a^3 - abb$ diviso-
res 1, $a, a - b, aa - ab, a + b, aa + ab, aa - bb$, & $a^3 - abb$: ipsius autem $aab - b^3$ diviso-
res erunt 1, $b, a - b, ab - bb, a + b, ab + bb, aa - bb$, & $aab - b^3$: at verò ipsius $a^3 + aab - abb - b^3$ diviso-
res erunt 1, $a - b, a + b, aa - bb, aa + 2ab + bb$, & $a^3 + aab - abb - b^3$. Jam cum inter ipsos tres sint, qui sibi invicem respondeant, ut $a - b, a + b$, & $aa - bb$, quorum ope datæ quantitates ad simpliciores reduci possunt; hinc ad inveniendum terminos simplicissimos, divido $a^3 - abb, aab - b^3$, & $a^3 + aab - abb - b^3$ per $aa - bb$ (utpote divisorem pluribus dimensionibus constantem), fiuntque a, b , & $a + b$. Ubi notandum, quantitates propositas fore inter se primas, si nulli ex divisoribus sibi mutuò respondeant.

Quæ ratio inveniendi diviso-
res non ineptè quoque adhiberi potest ad fractionum abbreviationem. Ut ad abbreviandum

Vide supra
pag. 22.

$\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ quia tam numerator quàm denominator dividi potest per $a + b$, poterit pro $\frac{a^3 - abb}{aa + 2ab + bb}$ scribi $\frac{aa - ab}{a + b}$. Et sic de cæteris.

Inventis autem omnibus divisoribus, videndum est num aliqui ex ipsis sint quadrati, vel cubi, &c. qui si reperiantur, adhiberi poterunt ad prædictum modum liberandi quantitates ex signo radicali.

dicali. Ut quia inter divisores quantitatis $a^3b + aabb$ reperitur quadratum aa , poterit $\sqrt{a^3b + aabb}$, dividendo per aa , reduci ad $a\sqrt{ab + bb}$.

Sic & cum $a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4$ pro divisore habeat quoque quadratum $aa + 2ac + cc - 2ab - 2bc + bb$, poterit pro

$\sqrt{a^3b - aabb + 2aabc + abcc - ab^3 + bbcc - 2b^3c + b^4}$ scribi $a + c - b\sqrt{ab + bb}$. Similiter cum numerus 75 inter divisores quoque habeat quadratum numerum 25, reduci poterit $\sqrt{75aa}$ ad $5a\sqrt{3}$. Ita &, quia 1200 dividi potest per numeros quadratos 4, 16, 25, 100, & 400; poterit pro $\sqrt{1200aabb}$ scribi $2ab\sqrt{300}$ vel $4ab\sqrt{75}$, vel $5ab\sqrt{48}$, vel $10ab\sqrt{12}$, vel denique $20ab\sqrt{3}$.

Quod si inter divisores præter unitatem quadratum nullum aut cubus &c. reperitur, non poterit data quantitas præcedenti modo reduci, nisi velis eam in formam fractionis designare. Ut quia 10 præter unitatem quadratum nullum inter divisores admittit, poterit $\sqrt{10aa}$, dividendo 10 per aliquod quadratum, ut lubet, ut 4, 25, 100, &c. denotari hoc pacto: $2a\sqrt{\frac{1}{4}}$, vel $5a\sqrt{\frac{1}{25}}$, vel $10a\sqrt{\frac{1}{100}}$, &c.

Sciendum denique, quod, licet hæ quantitates omnes per se consideratæ surdæ existant, tamen inter se collatæ duorum sint generum: aliæ enim dicuntur Commensurabiles seu Communicantes; aliæ verò Incommensurabiles seu non Communicantes.

Communicantes sunt, quæ affinitatem habentes cum quantitatibus rationalibus, aut etiam numeris, inter se sunt ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, seu sicut numerus ad numerum.

Non Communicantes verò sunt, quarum unius ad alteram relatio non est ut quantitatis rationalis ad quantitatem rationalem, aut numeri ad numerum.

Ratio autem dignoscendi communicantes à non communicantibus est, si, postquam ad simplicissimos terminos sunt reductæ, reperiantur inter se esse ut quantitas rationalis ad quantitatem rationalem, aut numerus ad numerum. Ut $\sqrt{75aa}$ & $\sqrt{27aa}$ sunt communicantes, quia divisione per $\sqrt{3}$, maximum earum com-

munem divisorem, reducuntur ad $\sqrt{25aa} \& \sqrt{9aa}$, hoc est, ad $5a \& 3a$: adeò ut pro $\sqrt{75aa} \& \sqrt{27aa}$ scribi possit $5a\sqrt{3} \& 3a\sqrt{3}$, quæ inter se sunt ut $5a$ ad $3a$, vel 5 ad 3 .

Eodem modo communicantes erunt $\sqrt{a^2+abb} \& \sqrt{abb+b^2}$, quia utrâque divisâ per $aa+bb$, oriuntur $\sqrt{aa} \& \sqrt{bb}$, seu $a \& b$: ideoque reducuntur ad $a\sqrt{aa+bb} \& b\sqrt{aa+bb}$, quæ inter se sunt ut a ad b .

Pag. 31.

Similiter communicantes sunt $\sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} \& \sqrt{\frac{aa00mm}{pp\gamma\gamma} + \frac{4aam^3}{p\gamma\gamma}}$: quippe reducuntur ad $\frac{z}{a}\sqrt{00+4mp} \& \frac{am}{p\gamma}\sqrt{00+4mp}$, quarum unius ad alteram ratio est, ut $\frac{z}{a}$ ad $\frac{am}{p\gamma}$, seu $p\gamma\gamma$ ad aam .

Haud aliter communicantes erunt $\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108} \& \sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$: reductæ enim ad $x+3$ $\sqrt{xx+12} \& 5-x\sqrt{xx+12}$, habent inter se eam rationem, quæ est ipsius $x+3$ ad $5-x$. Et sic de aliis.

De Additione & Subtractione quantitatum surdarum.

AD addendum vel subtrahendum quantitates surdas, oportet primùm explorare utrum sint communicantes nec ne: si enim communicantes fuerint, adduntur tantùm vel subtrahuntur quantitates vel numeri, qui extra signum radicale reperiuntur. Ut ad addendum $\sqrt{75aa} \& \sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3} \& 3a\sqrt{3}$, scribo, additis $5a \& 3a$, pro summa $8a\sqrt{3}$; & $2a\sqrt{3}$, pro eandem differentia, utpote sublatis $3a$ ex $5a$.

Eodem modo si fuerint $\sqrt{a^2+abb} \& \sqrt{abb+b^2}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb} \& b\sqrt{aa+bb}$: addendo & subtrahendo $a \& b$, erit summa $a+b\sqrt{aa+bb}$, & differentia $a-b\sqrt{aa+bb}$. Similiter si proponatur $\sqrt{\frac{00zz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} \& \sqrt{\frac{aa00mm}{pp\gamma\gamma} + \frac{4aam^3}{p\gamma\gamma}}$, hoc est, $\frac{z}{a}\sqrt{00+4mp} \& \frac{am}{p\gamma}\sqrt{00+4mp}$, erit summa $\frac{pz\gamma+amm}{ap\gamma}\sqrt{00+4mp}$, & dif-

& differentia $\frac{p^2 x - a a m}{a p x} \sqrt{00 + 4 m p}$. Nec aliter fit si habeatur
 $\sqrt{\frac{4 a a b b - 4 a a x x}{b b}}$ vel $\frac{2 a}{b} \sqrt{b b - x x}$ & $\sqrt{b b - x x}$: erit enim Pag. 173.
lin. 18.
 summa $\frac{2 a + b}{b} \sqrt{b b - x x}$, & differentia $\frac{2 a - b}{b} \sqrt{b b - x x}$. Pari

ratione additis $\sqrt{x^4 + 6 x^3 + 21 x x + 72 x + 108}$ &
 $\sqrt{x^4 - 10 x^3 + 37 x x - 120 x + 300}$, hoc est, $x + 3$
 $\sqrt{x x + 12}$ & $5 - x \sqrt{x x + 12}$, erit summa $8 \sqrt{x x + 12}$, eif-
 demque subtractis, erit differentia $2 x = 2 \sqrt{x x + 12}$.

Quod si verò non communicantes fuerint, non poterunt addi
 vel subtrahi ita ut unam radicem constituent, quocirca addendæ
 vel subtrahendæ sunt mediantibus signis + & -. unde Binomia
 & Multinomia exsurgunt. Ut si addendum sit $\sqrt{a a + b b}$ ad $\sqrt{a a - b b}$,
 scribo pro summa $\sqrt{a a + b b} + \sqrt{a a - b b}$; & ad subtrahendum
 $\sqrt{a a - b b}$ de $\sqrt{a a + b b}$, scribo pro reliquo $\sqrt{a a + b b} - \sqrt{a a - b b}$.
 Non secus si addatur $a + b$ ad $\sqrt{a a + b b}$, erit summa
 $a + b + \sqrt{a a + b b}$; at si subducatur $\sqrt{a a + b b}$ de $a + b$, erit
 reliquum $a + b - \sqrt{a a + b b}$. Cum enim $a + b$ sit quantitas ra-
 tionalis, & $\sqrt{a a + b b}$ quantitas furda, non magis communicantes
 esse possunt, quam omnes quantitates furdæ, quæ diversis signis
 radicalibus designantur. Haud dissimili ratione concludes sum-
 mam ex $a a + b b + a \sqrt{a a + b b}$ & $a a - b b - b \sqrt{a a + b b}$ esse
 $2 a a + a - b \sqrt{a a + b b}$, & differentiam esse $2 b b + a + b \sqrt{a a + b b}$.

De Multiplicatione quantitatum furdarum.

SI quantitates datæ sunt communicantes, oportet, multiplica-
 tis quantitatibus vel numeris extra signum radicale positis,
 productum multiplicare per quantitatem vel numerum sub signo
 radicali contentum, ut habeatur productum quæsitum. Ut ad
 multiplicandum $\sqrt{75 a a}$ per $\sqrt{27 a a}$, hoc est, $5 a \sqrt{3}$ per $3 a \sqrt{3}$,
 multiplico primum $5 a$ per $3 a$, & fit $15 a a$: tum $15 a a$ per 3 ,
 eritque productum quæsitum $45 a a$.

Eodem modo ad multiplicandum $\sqrt{a^2 + a a b b}$ per $\sqrt{a a b b + b^2}$,
 hoc est, $a \sqrt{a a + b b}$ per $b \sqrt{a a + b b}$: multiplicato a per b , &
 E 3 pro-

producto ab per $aa+bb$, fiet productum quæsitum a^3b+ab^3 .
Nec aliter fit si ad multiplicandum proponatur

$\sqrt{x^4+6x^3+21xx+72x+108}$ per
 $\sqrt{x^4-10x^3+37xx-120x+300}$, hoc est, $x+3\sqrt{xx+12}$,
per $5-x\sqrt{xx+12}$: Multiplicatis enim $x+3$ per $5-x$, fit
 $15+2x-xx$, quod multiplicatum per $xx+12$, productum
facit $180+24x+3xx+2x^3-x^4$.

Quòd si datae quantitates non fuerint communicantes, oportet tantum multiplicare quantitates sub signis radicalibus comprehensas, & productum præfigere commune signum radicale. Si verò signa radicalia diversa fuerint, reducenda prius sunt ad idem signum, sicut superius est ostensum, & deinde operandum, ut jam dictum est. Ut, ad multiplicandum \sqrt{ab} per \sqrt{cd} : multiplicatis ab per cd , præfigatur productio $abcd$ signum $\sqrt{}$, & fit productum quæsitum \sqrt{abcd} . Sic & ad multiplicandum $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa-bb}$: multiplicatis $aa+bb$ per $aa-bb$, fiet productum $\sqrt{a^4-b^4}$. Similiter si multiplicari debeat $\sqrt{aa+bb}$ per $a+b$, reduco prius $a+b$ ad idem signum radicale, & fit $\sqrt{aa+2ab+bb}$: tum multiplicatis $aa+2ab+bb$ per $aa+bb$, fit productum $\sqrt{a^4+2a^3b+2aabb+2ab^3+b^4}$, vel etiam scribendo hoc pacto: $a+b\sqrt{aa+bb}$. Nec aliter fit si multiplicandum sit $a+\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$, hoc est, $a+\sqrt{bc}$ in se: multiplico primum $a+\sqrt{bc}$ per a , & fit $aa+a\sqrt{bc}$: tum $a+\sqrt{bc}$ per \sqrt{bc} , fitque $a\sqrt{bc}+bc$. quæ producta si addantur, fiet productum quæsitum $aa+bc+2a\sqrt{bc}$. Non secus si multiplicandum proponatur $\sqrt{aa+bb}+\sqrt{aa-bb}$ per $\sqrt{aa+bb}-\sqrt{aa-bb}$: quia multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $\sqrt{aa+bb}$, & $+\sqrt{aa-bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$ (omissis scilicet tantum signis radicalibus) fiunt $aa+bb$ & $-aa+bb$; at verò multiplicando $\sqrt{aa+bb}$ per $-\sqrt{aa-bb}$, & $\sqrt{aa+bb}$ per $+\sqrt{aa-bb}$ producta evanescent: hinc productum quæsitum erit $2bb$.

De Divisione quantitarum surdarum.

SI datae quantitates sunt communicantes, oportet tantum dividere quantitates, vel numeros, extra signum radicale positos, &

& quod oritur erit quotiens quæsitus. Ut ad dividendum $\sqrt{75aa}$ per $\sqrt{27aa}$, hoc est, $5a\sqrt{3}$ per $3a\sqrt{3}$: divido $5a$ per $3a$, seu 5 per 3 ; eritque quotiens quæsitus $\frac{5}{3}$ seu $1\frac{2}{3}$. Sic & ad dividendum $\sqrt{a^3+abb}$ per $\sqrt{abb+b^3}$, hoc est, $a\sqrt{aa+bb}$ per $b\sqrt{aa+bb}$: divis a per b , fit quotiens $\frac{a}{b}$. Non secus \sqrt{abcc} seu $c\sqrt{ab}$ divisum per \sqrt{ab} dat c . Et sic de aliis.

Quod si communicantes non fuerint, dividendæ erunt quantitates sub signis radicalibus comprehensæ, & ei quod oritur præfigendum est commune signum radicale. Ut ad dividendum $\sqrt{a^3b-ab^3}$ per $\sqrt{aa-bb}$: divis a^3b-ab^3 per $aa-bb$, fit ab ; unde quotiens quæsitus erit \sqrt{ab} .

Et quidem si signa radicalia fuerint diversa, reducenda prius erunt ad idem signum, & deinde operatio instituenda erit, ut jam dictum est. Ut ad dividendum a^3+abb per $\sqrt{a^3+abb}$: multiplicando a^3+abb in se, fit $a^6+2a^2bb+aaab^3$; quare divisâ $\sqrt{a^6+2a^2bb+aaab^3}$ per $\sqrt{a^3+abb}$, erit quotiens $\sqrt{aa+bb}$. Sic & si dividatur $\sqrt{a^3+2a^2b-2ab^2-b^3}$ per $a+b$: multiplico primum $a+b$ in se, ut fiat sub eodem signo radicali $\sqrt{aa+2ab+bb}$, quo facto, si dividatur $\sqrt{a^3+2a^2b-2ab^2-b^3}$ per $\sqrt{aa+2ab+bb}$, fiet quotiens quæsitus $\sqrt{aa-bb}$.

Non aliâ ratione $aa+bb$ divisum per $\sqrt{aa+bb}$, facit $\sqrt{aa+bb}$, quippe diviso quadrato per suum latus, oritur latus. Unde si a^3+abb dividatur per $\sqrt{aa+bb}$, orietur $a\sqrt{aa+bb}$.

Porro si dividendum sit $a^3+abb+ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, divido primum a^3+abb per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit, ut ante, $\sqrt{aa+bb}$; tum $ab\sqrt{aa+bb}$ per $a\sqrt{aa+bb}$, & fit b , unde quotiens quæsitus erit $\sqrt{aa+bb}+b$. Non secus si dividatur $\sqrt{a^3+2a^2b-2ab^2-b^3}-aa+bb$ per $a+b$, orietur $\sqrt{aa-bb}-a+b$. Similiter si dividendum proponatur $ab+b\sqrt{bc}$ per $a+\sqrt{bc}$: quoniam ab divisâ per a , eadem exoritur quantitas b , quæ provenit dividendo $b\sqrt{bc}$ per \sqrt{bc} : hinc quotiens quæsitus erit b . Eodem modo $ab-bbc-ab+\frac{b^2c}{a}$ \sqrt{bc} divisum per $a-\sqrt{bc}$, facit $ab-\frac{b^2c}{a}$.

Postea ad dividendum $aa-bc$ per $a+\sqrt{bc}$ divido aa per a , & fit

& fit a , quod multiplicatum per \sqrt{bc} producit $a\sqrt{bc}$, eritque reliquum dividendi $-a\sqrt{bc} - bc$. diviso jam $-a\sqrt{bc}$ per a , fit \sqrt{bc} , quod multiplicatum per $+\sqrt{bc}$, facit $-bc$: hoc igitur si auferatur à reliquo dividendi $-bc$, relinquetur 0, & absoluta erit divisio, eritque quotiens quaesitus $a - \sqrt{bc}$. Eodem modo $ab - cd$ divisum per $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$, dat $\sqrt{ab} + \sqrt{cd}$: & $a^3 + bc\sqrt{bc}$ divisum per $a + \sqrt{bc}$, dat $aa + bc - a\sqrt{bc}$: & $aabb - ccd$ divisum per $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$, dat $ab + cd\sqrt{ab} + ab + cd\sqrt{cd}$: & $a^3b - abbc$ divisum per $aa + a\sqrt{bc}$, dat $ab - b\sqrt{bc}$: ut & $a^3 + abc + aa - bc\sqrt{bc}$ divisum per $a - \sqrt{bc}$, dat $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$.

Denique ad dividendum $\sqrt{a^2 + b^2}$ per $c - d$: quia $\sqrt{a^2 + b^2}$ per $c - d$ seu $\sqrt{cc - 2cd + dd}$ dividi nequit, scribo pro quotiente $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c - d}$, vel $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{cc - 2cd + dd}}$, vel etiam hoc pacto: $\frac{1}{c - d} \sqrt{a^2 + b^2}$.

Eodem modo si dividatur $a\sqrt{aa + bb}$ per $a + b$, fiet quotiens $\frac{a}{a + b} \sqrt{aa + bb}$. Similiter $aa + bb$ divisum per $\sqrt{aa} - \sqrt{bb}$ exhibet quotientem $\frac{aa + bb}{\sqrt{aa} - \sqrt{bb}}$: & $aa + \sqrt{abcd}$ per $a + \sqrt{bc}$, facit $\frac{aa + \sqrt{abcd}}{a + \sqrt{bc}}$.

Sic etiam ad dividendum $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ per $8\sqrt{xx + 12}$, scribitur pro quotiente $\frac{180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4}{8\sqrt{xx + 12}}$; vel

quia $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ producit ex $15 + 2x - xx$ in $xx + 12$, quadratum nempe ipsius $\sqrt{xx + 12}$, fit ut scribi

quoque possit $\frac{15 + 2x - xx \text{ in } xx + 12}{8\sqrt{xx + 12}}$, vel brevius $\frac{15 + 2x - xx}{8}$.

$\sqrt{xx + 12}$, utpote dividendo $xx + 12$ per $\sqrt{xx + 12}$. Non aliter si $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ fit dividendum per $x + 3\sqrt{xx + 12}$, scribo pro quotiente $\frac{180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4}{x + 3\sqrt{xx + 12}}$.

seu $\frac{60 - 12x + 5xx - x^3}{\sqrt{xx + 12}}$. nam $180 + 24x + 3xx + 2x^3 - x^4$ dividi potest per $x + 3$, & fit $60 - 12x + 5xx - x^3$; vel quoniam $60 - 12x + 5xx - x^3$ producit ex $5 - x$ in $xx + 12$, fit ut etiam scribi possit $\frac{5 - x \text{ in } xx + 12}{\sqrt{xx + 12}}$ seu $5 - x\sqrt{xx + 12}$.

De

De Extractione Radicis Quadratae ex Binomiis.

Modus, quo ex quantitibus binomiis radix quadrata extrahitur, non differt ab eo, qui in numeris adhiberi solet ad inventionem radice quadratae ex Binomiis, estque talis:

Subductis quadratis partium dati Binomii à se invicem, si radix quadrata reliqui ad partem majorem addatur, & ab eadem auferatur; erunt radices quadratae ex semisse summa & differentia, per signum + vel — dati Binomii connexae, binae partes radice quaesitae.

Regula extrahendi radicem quadratam ex Binomiis.

Ut ad extrahendum radicem quadratam ex $aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, subtrahatur $4aabc$, quadratum minoris partis ex $a^4 + 2aabc + bbcc$ quadrato partis majoris, & relinquitur $a^4 - 2aabc + bbcc$, cujus radix quadrata $aa - bc$ addita ad majorem partem $aa + bc$, & ab eadem ablata facit summam $2aa$, & differentiam $2bc$, quarum semisses sunt a & \sqrt{bc} : unde radices quadratae sunt a & \sqrt{bc} , quae si connectantur per signum +, erit radix quaesita $a + \sqrt{bc}$.

Sic radix quadrata ex $mm + \frac{p \times x}{m} + x\sqrt{\frac{p}{m}}$ erit $m + x\sqrt{\frac{p}{m}}$. Pag. 182, lin. 13.

Eodem modo si extrahenda sit radix quadrata ex $a + b\sqrt{ab} + 2ab$: subducto $4aabb$, quadrato partis minoris, ex $a^2b + 2aabb + ab^2$, quadrato majoris partis, erit reliqui $a^2b - 2aabb + ab^2$ radix quadrata $a - b\sqrt{ab}$. quae si addatur & auferatur ex majori parte $a + b\sqrt{ab}$, fiet summa $2a\sqrt{ab}$, & differentia $2b\sqrt{ab}$, unde semissimum radices quadratae constituunt radicem quaesitam $\sqrt{a\sqrt{ab}} + \sqrt{b\sqrt{ab}}$ seu $\sqrt{a^2b} + \sqrt{ab^2}$.

Nec aliter fit cum extrahitur radix quadrata ex $a + d\sqrt{bc} + 2\sqrt{abcd}$: etenim subducto $4abcd$, quadrato minoris partis, ex $a^2bc + 2abcd + bcdd$, quadrato majoris partis, relinquetur $a^2bc - 2abcd + bcdd$, cujus radix quadrata est $a - d\sqrt{bc}$: haec ergo si addatur & subtrahatur ex majori parte $a + d\sqrt{bc}$, erit summa $2a\sqrt{bc}$, & differentia $2d\sqrt{bc}$: Ex quarum dimidiis si radices quadratae extrahantur, fiet radix quaesita $\sqrt{a\sqrt{bc}} + \sqrt{d\sqrt{bc}}$ vel $\sqrt{aabc} + \sqrt{ddbc}$.

F

Quod

Pag. 6.

Quòd si, subductis quadratis partium dati binomii à se invicem, reliqui radix quadrata & major pars binomii communicantes non fuerint: satius erit ipsi binomio signum universale radicis quadratæ præfigere. Ut ad extrahendam radicem quadratam ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ scribo $\sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. quæ radices vulgò appellantur Universales.

DE REDUCTIONE ÆQVATIONVM.

Quoniam ad resolvendum aliquod Problema, id ipsum supponendum est ut jam factum, atque nomina imponenda sunt quantitibus tum datis, tum quæsitis; & quidem pro datis à D. Des-Cartes ordinariè ponuntur priores literæ Alphabeti a, b, c , &c. pro quæsitis autem posteriores ζ, γ, x , &c: fit ut percurrendo Problematis difficultatem, eo ordine, quo omnium naturalissimè patet, quâ ratione dictæ quantitates, nullo inter cognititas & incognitas facto discrimine, à se invicem dependent, tandem inveniatur via quantitatem aliquam duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur. Unde cum æquatio nihil aliud sit, quàm mutua comparatio duarum rerum æqualium, quæ variè denominantur: facilè constat, quantitates hasce cognititas & incognitas, prout diversimode sunt affectæ atque dispositæ, diversas efficere posse Æquationum formulas, quæ tamen per sequentes regulas reduci queunt ad hasce similèsvè species:

$$\begin{aligned} &\zeta \propto b, \text{ aut} \\ &\zeta \zeta \propto -a\zeta + bb, \text{ aut} \\ &\zeta^3 \propto +a\zeta\zeta + bb\zeta - c^3, \text{ aut} \\ &\zeta^4 \propto +a\zeta^3 + bb\zeta\zeta - c^3\zeta + d^4, \text{ \&c.} \end{aligned}$$

De Reductione per Additionem.

Vt si habeatur æquatio inter $\zeta - 3$ & 12 , hoc est, si fuerit $\zeta - 3 \propto 12$: quoniam si æqualibus æqualia vel idem addas, ea quæ fiunt sunt æqualia; hinc si utrinque addatur $+ 3$, fiet $\zeta \propto 15$. nam $- 3$ & $+ 3$ addita faciunt 0 .

Sic & si fuerit $\zeta - b \propto 0$, addendo utrinque b , fiet $\zeta \propto b$. Aut si ha-

si habeatur $b - z \infty 0$, fiet, addendo utrobique z , $b \infty z$. Et si habeatur $zz - az \infty 0$, erit $zz \infty az$: ut & si $z - az \infty 0$, fiet $z \infty az$, &c.

Nonsecus si habeatur $z^2 - az - bb \infty d^2 - c^2$, addendo utrique parti $+ az + bb$, fiet $z^2 \infty az + bb$, $z^2 - c^2 \infty d^2$.

Ex quibus constat, quantitates signo $-$ adfectas addi utrique parti, si eximantur ab una parte, & in alteram partem transferantur sub signo $+$.

De Reductione per Subtractionem.

DEinde si fuerit $z + 3 \infty 12$; quia si ab æqualibus æqualia vel idem auferas, illa quæ relinquuntur sunt æqualia, fit ut, subtrahendo utrinque $+ 3$, habeatur $z \infty 9$.

Eodem modo si habeatur $zz + az \infty bb$, subtrahendo utrinque $+ az$, fiet $zz \infty - az + bb$.

Similiter $z^2 + 2cz \infty az + bb$ reducetur ad $z^2 \infty az + bb - c^2$, subtrahendo utrinque $+ 2cz$.

Unde colligitur quantitates signo $+$ adfectas ab utraque parte subtrahi, eximendo ipsas ex una parte & transferendo in alteram partem sub signo $-$: atque adeò quicquid vel additione vel subtractione transfertur, adfici signo contrario.

De Reductione per Multiplicationem.

PORRò si ad reducendum proponatur $\frac{z}{3} \infty 5$: quoniam æqualia per æqualia vel idem multiplicata, producunt æqualia; fiet multiplicando utrinque per 3 , $z \infty 15$. Sic & si habeatur $z \infty \frac{az}{z}$, inveniatur, multiplicando utrinque per z , $zz \infty az$, &c.

Eodem modo si fuerit $\frac{zz}{z-b} \infty a$: quoniam, delendo denominatorem $z-b$ prioris partis $\frac{zz}{z-b}$, ipsa pars multiplicatur per $z-b$: hinc oportet etiam alteram partem a multiplicare per $z-b$, ut habeatur æquatio inter zz & $az - ab$.

Similiter si sit $\frac{zz}{a} \infty \frac{zz - bz + bb}{z}$: quoniam, sublato denominatore

F 2

tore

tore a partis prioris $\frac{zz}{a}$, multiplicata est pars prior per a , & fit zz ; hinc oportet & alteram partem $\frac{zz-bz+bb}{z}$ multiplicare per a , ut habeatur $\frac{azz-abz+abb}{z}$. Unde cum æquatio proposita reducta sit ad $zz \propto \frac{azz-abz+abb}{z}$, si denuo utraque pars multiplicetur per z , denominatorem posterioris partis $\frac{azz-abz+abb}{z}$, fiet $z^3 \propto azz - abz + abb$.

Ex quibus patet, æquationem, cujus utraque pars est fractio, reduci ad aliam, quæ fractione caret, multiplicando per crucem, numeratorem nempe prioris partis per denominatorem posterioris, & numeratorem posterioris partis per denominatorem prioris. Quod idem est ac si binæ partes æquationis ad eandem denominationem reducantur, ipsæque deinde, omittendo communem denominatorem, per eundem multiplicentur.

Ubi notandum, ad maiorem abbreviationem atque operationis facilitatem, non raro tum numeratores, tum denominatores, ante hanc multiplicationem ad simpliciores terminos reduci posse. Ut si fuerit $\frac{z^3}{zz-aa} \propto \frac{az-aa}{z+a}$: reductis denominatoribus $zz-aa$ & $z+a$ ad $z-a$ & 1 , fiet $\frac{z^3}{z-a} \propto \frac{az-aa}{1}$. ac proinde, si multiplicetur per crucem, inveniatur $z^3 \propto azz - 2aaz + a^3$. Similiter si habeatur $\frac{azz-bbz}{z+b} \propto \frac{a^3-abb}{z}$: reductis numeratoribus $azz-bbz$ & a^3-abb ad z & a , habebitur $\frac{z}{z+b} \propto \frac{a}{z}$, ubi, si per crucem multiplicetur, fiet $zz \propto az + ab$. Non secus si habeatur $\frac{azz-bbz}{bb-bz} \propto \frac{aa-ab}{b}$: cum numeratores $azz-bbz$ & $aa-ab$ reduci possint ad zz & a , ut & denominatores $bb-bz$ & b ad $b-z$ & 1 , fiet $\frac{zz}{b-z} \propto \frac{a}{1}$; ideoque multiplicando per crucem, exsurget $zz \propto -az + ab$.

Huc etiam refer, cum integrum æquatur fractioni. Ut si habeatur æquatio inter $\frac{az^3-bz^3}{zz+az+aa}$ & $ab-bb$: substitutâ enim unitate pro denominatore ipsius integri $ab-bb$, cum az^3-bz^3 & $ab-bb$ reduci possint ad z^3 & b , erit æquatio talis

$\frac{z^3}{z^2 + az + aa} \propto \frac{b}{1}$, unde multiplicando per crucem, invenietur æquatio $z^3 \propto bz^2 + abz + aab$.

Ad hæc si proponatur \sqrt{z} æquari 5: quoniam æqualium æqualia quoque sunt quadrata, cubi, &c; hinc si utraque pars in se multiplicetur quadratè, habebitur $z \propto 25$. Sic & si fuerit $\sqrt{z} \propto \sqrt{5}$: ductâ utraq; parte in se quadratè, fiet $z \propto 5$. Pari ratione si \sqrt{z} æquetur $\sqrt{aab - b}$, erit $z \propto aab - b$. Haud secus si fuerit $\sqrt{C. z} \propto \sqrt{C. aabb - b}$, fiet, utramque partem in se multiplicando cubicè, $z \propto aabb - b$. Et sic de aliis.

De Reductione per Divisionem.

Postea si detur $zz \propto 4z$: quoniam, æqualibus per æqualia vel idem divisis, proveniunt æqualia, fit ut, si utraque pars dividatur per z , oriatur $z \propto 4$. Sic & si habeatur $z^3 \propto az^2 + bbz$, dividendo utrinque per z , fiet $z \propto az + bb$. Similiter fit, si proponatur $3z \propto 12$: etenim si utrobique dividatur per 3, proveniet $z \propto 4$. Eodem modo si fuerit $az \propto ab$, dividendo utramque partem per a , fiet $z \propto b$. Nec aliter si habeatur $ax - bx \propto bb$, oriatur, divisâ utraq; parte per $a - b$, $x \propto \frac{bb}{a - b}$. Haud secus si proponatur $azz + bzz \propto abz + bbz - abb - b^3$: quoniam utraque pars dividi potest per $a + b$, oriatur $z \propto bz - bb$. Sic & si fuerit $azz - bzz \propto aaz - bbz + abc$, dividendo utrinque per $a - b$, fiet $z \propto az + bz + \frac{abc}{a - b}$, seu $z \propto \frac{a}{+b}z + \frac{ab}{a - b}$.

Pag. 149,
lin. 27.

Huc referendum quoque est, cum binæ æquationis partes, juxta modum p. 34. ostensum, reduci possunt ad simpliciores terminos. Ut si fuerit æquatio inter $az^2 - abz^2 + abbz$ & $- abz^2 + 2abbz - 2ab^2z + ab^3$: dividendo utramque partem per maximum communem divisorem $az - abz + abb$, oriatur $z \propto -bz + bb$.

De Reductione per Extractionem Radicis.

Denique ad reducendum $z \propto 25$: quoniam æqualium quadratorum ac cuborum &c. æqualia quoque sunt latera seu radices, fit ut, si ex utraque parte extrahatur radix quadrata, pro-

veniat $z \propto 5$. Sic & si fuerit $z^3 \propto 125$, erit, extractâ utrinque radice cubicâ, $z \propto 5$. Eâdem ratione, si habeatur $zz \propto aa + 2ab + bb$: extractâ utrobique radice quadratâ, fiet $z \propto a + b$. Nec aliter fit si fuerit $zz \propto aa + bc + 2a\sqrt{bc}$, erit enim $z \propto a + \sqrt{bc}$. Non secus si xx

pag. 6. æquetur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, erit $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

His subjunge sequens exemplum, in quo omnes præcedentes modi reductionis simul occurrunt. Proponatur $\sqrt{\frac{zz+3aa}{4}} - \sqrt{\frac{zz-3aa}{4}}$
 $\propto \sqrt{\frac{azz}{b}}$: quia igitur eorum, quæ æqualia sunt, æqualia quoque sunt quadrata, fiet, multiplicando utramque partem in se quadratè, $\frac{1}{2}zz - \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}} \propto \frac{azz}{b}$. Addatur jam utrinque $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$, & subtrahatur $\frac{azz}{b}$, transferendo scilicet ipsas in alteram partem sub contrario signo, ut habeatur $\sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$ sola ex una parte, fietque $\frac{1}{2}zz - \frac{azz}{b} \propto \sqrt{\frac{z^4-9a^4}{4}}$. Quo factò, multiplicetur rursus utraque pars æquationis in se quadratè, ut evanescat signum radicale; habebiturque $\frac{1}{4}z^4 - \frac{azz^2}{b} + \frac{aazz^2}{bb} \propto \frac{z^4-9a^4}{4}$. Ubi si utrinque dematur $\frac{1}{4}z^4$, ac reliquæ partes omnes addendo ac subtrahendo ex una parte in alteram transferantur, quod fit mutatis tantùm signis, erit $\frac{azz^2}{b} - \frac{aazz^2}{bb} \propto \frac{9a^4}{4}$. Porro ut deleantur fractiones, reducantur omnes termini ad communem denominatorem $4bb$: quo peracto, si utrinque per eundem multiplicetur, ipsum nempe denominatorem omitendo, obtinebitur $4abz^2 - 4aazz^2 \propto 9a^4bb$. Dividatur jam ubique per a , hoc est, a ubique deleatur fitque $4bz^2 - 4az^2 \propto 9a^3bb$: quo factò, dividatur utraque pars per $4b - 4a$ ut habeatur quantitas z^4 ex una parte sola, eritque $z^4 \propto \frac{9a^3bb}{4b-4a}$. Ubi si utrobique extrahatur radix quadrata, habebitur $zz \propto \frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}$: & si denuo utrinque extrahatur radix quadrata, inveniatur $z \propto \sqrt{\frac{3}{2}ab\sqrt{\frac{a}{b-a}}}$.

E quibus patet, reductionem per additionem & subtractionem

nem institui tam ad diminuendam multitudinem terminorum, quàm ad æquationem ritè ordinandam; reductionem verò per multiplicationem ad evitandas tum fractiones tum quantitates surdas; & reductionem per divisionem, tam ad deprimendas dimensiones, quàm ad reducendam æquationem ad debitam formam & simplicissimos terminos; ac denique reductionem per extractionem radicis, ad obtinendam æquationem ex minimis terminis constantem; præterquam quòd omnes hæ reductiones etiam ad quantitatem quæ sitam ex data æquatione inveniendam utiles esse possint. Atque hæc quidem ad introductionem Methodi Geometriæ Renati Des-Cartes dicta sufficiant.

F I N I S.



FRAN-

FRANCISCUS à SCHOOTEN
A D L E C T O R E M.

NE menda, quæ in edendo hoc opere hucusque commissæ deprehendimus, Lectorem in eo evolvendo remorarentur; sed ipsius studio, quantum in nobis esset, ritè confuleretur: monendum duximus, ut illa in antecessum sic emendare dignetur.

Pag. 19. lin. 16. lege *non abs re.* p. 33. l. 1 & 2 pro $\frac{a}{z}$ scribe $\frac{z}{a}$.
ibid. l. 19. pro A P scribe A B. ibid. l. ult. clariùs exprimatür lineæ superducta, quæ vix ac ne vix quidem apparet. Quod & aliis in locis est observandum. p. 41. l. 7. lege G A. p. 46. l. 15. pro — ef lege — 2 ef. p. 47. l. 14. pro $\frac{2e^3}{dd}$ & $\frac{3bee}{dd}$ scribe $\frac{3e^3}{dd}$ & $\frac{4bee}{dd}$.
ibid. l. penult. pro $\frac{2y^3}{dd}$ & $\frac{3byy}{dd}$ scribe $\frac{3y^3}{dd}$ & $\frac{4byy}{dd}$. p. 67. l. 23. pro Y Z lege Y E. p. 74. in calculo ultimi termini æquationis adhuc semel ponendum est — 7776 n⁶. p. 91. l. 9. pro F A lege L A. p. 298. in margine lege *Reductio*. p. 306. l. 7. pro x³ lege x⁴.

Cæterùm ne locus superflus hujus paginæ vacuus relinquere-
tur, visum fuit hoc loco simul indicare sphalmata, quæ in Exerci-
tationibus nostris Mathematicis, quas anno 1657 in lucem emisimus, fuerunt commissæ, ac postmodum à nobis recognita: ut, iis sequenti modo correctis, Lectoris studium in consimili argumen-
to absque mora occuparetur.

Pag. 6. l. 2 lege *pretium*. p. 7. l. 8 lege *questio*. p. 163. l. penult. lege *quasiverim*. p. 193. l. 12 lege *nulla omnino*. p. 228. l. 3 lege fit $\frac{z}{z}$ — 2 aa.
ibid. l. penult. lege *in circumferentia*. p. 295. l. 28 lege *descriptio*.
p. 317. l. 22 lege *quod est rectum*. p. 327. l. 4 lege *Ostensio*. ibid. l. antep. lege *ipsa circa*. p. 329. l. 10 pro E G lege E C. p. 347. l. 5 pro E C, E F lege e C, e F. p. 361. l. 1 lege *ad E, ita ut A E sit æqualis A B*.
p. 372. l. antep. post *Quod*, & p. 393. l. 9 post *Quod eo tolle vir-
gulas*. p. 423. l. 15 pro 69 lege 639. p. 432. l. 7 lege 1634.
p. 434. l. ult. & p. 462. l. 30, ut & p. 480. l. 24. lege *abs re*. p. 471.
l. 22 lege *in locum xx*. p. 525. lineæ 6, 7, 8, 9, 10 in locum linea-
rum 2, 3, 4, 5 sunt substituendæ, & vice versâ. p. 527. l. 21 lege
Hæ autem.

DE
ÆQUATIONUM

Natura, Constitutione, & Limitibus

Opuscula Duo.

Incepta à

FLORIMONDO DE BEAUNE,

In Curia Blesensi Consiliario Regio;

Absoluta verò, & post mortem ejus edita

ab

ERASMIO BARTHOLINO,

Medicinæ & Mathematicum in Regia Academia

Hafnienfi Professore publico.



AMSTELÆDAMI;

Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,

cl^o lcc lxx.

SUMMO MUSARUM
MECOENATI
ILLUSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO
DOMINO,
IOACHIMO GERSDORPH
TOPARCHÆ IN TUNDBYHOLM, &c.
EQUITI AURATO,
REGNIDANIÆ SUMMO AULÆ MAGISTRO,
PRINCIPI SENATORI,
REGIÆ MAJESTATIS PRÆSIDI BORINGHOLMENSI
H O G
SPECIMEN ANALYTICES
NOVO ARGUMENTO
CONSECRAT
OBSEQUIUM.

Quod

Quod jam pridem in votis e-
rat, studii & pietatis meæ ex-
perimentum Tibi probari, id
recentissima Musarum Al-
gebra interpretabitur. Etsi enim, bene-
ficia maxima, quibus me totamque do-
mum nostram onerasti, quàm grato a-
nimo exceperim, mihi ipse sim testis;
tamen miseram eam vitam putavi, cui
esse gratam probare antea non licuit:
id aliquo obsequio, tum ipsi Tibi, tum
cæteris omnibus indicatum, maxime-
que perspicuum esse desideravi. Neq;
æquum est, virtutis deprædicationem
privatis tantum parietibus claudi. In-
ter ingratos etiam annumerantur ii,
qui beneficia accepta paucis com-
memorant; totus Orbis, adhibendus est,
pietatis nostræ testis & conscius. Quo-
niam verò monimentum Tuarum vir-
tutum nulla unquam obscurabit obli-
vio; nullum erit tali Heroï dignius ge-
nus obsequii, quàm quod nulla tempo-
ris

ris circumscriptione terminatur. Quocirca hoc opusculum Algebraicum opportunissimum existimavi, quod meæ perpetuæ observantiæ testem sempiternum constituerem; in quod haud obscure conjicio, nihil senectuti, nihil successoribus licere. Mirandam Algebrae vim multis verbis exponere super vacuum est, quippe secunda demonstrationis suæ, semper & pacis & belli serviit artibus; in qua hoc eximium est, quòd abundantias defectusq; pari momento æstimet, neque illi, quæ plus habent, magis necessaria sunt, quàm quæ minus; atq; hoc suæ scientiæ habet monumentum, quod mortales faciunt Virtutis. Verùm, artium & scientiarum incrementa, non in ipsarum modo ingenio, sed etiam in superiorum clementia sita sunt; æstimantur quoque pleraque mortalium pretio, quod libido calumniandi constituit; & quis neget, eximium decus, sæpius favoris, quàm virtutis

tutis esse beneficium? unde patrono & defensore iis opus est, sub cuius auspiciis floreat. Algebrae nihil ad augendum fastigium superest, hoc tamen uno modo crescere potest. Te ergo praefertim invocat, cuius cepimus & affectus & iudicii experimentum, quantum maximum Musae capere potuerunt. Indulgentiae Tuae propinquum exemplum est Astronomia, quam in Tuo gremio suscepisti, cum naufragium illud observationum Tychonicarum, quas invidiosa tranquillitate proventus improvisus turbo abstulerat, Tua benignitate refarcires. Tuo beneficio patriam receperunt. Taceo literas Graecas, quas maioribus suis ita reddidisti, ut illae utrum plus Tibi, an Tu illis debeas ambigi possit. Et ut verbo absolvam, Tuae benevolentiae usum nec litteris nec hominibus unquam denegasti. Quare illud extremum oro, ut eidem Generositati, cui tribuisti hoc, ut

literas susciperes , attribuas, ut suscep-
tas tuearis ac foveas : atque hoc grati
animi , non omnino quale velim , sed
quale possum hoc tempore monimen-
tum , favore excipere digneris. Cele-
bratum est famâ & acclamatione quan-
tum Astronomiam amplificaverit Da-
nia, Tibi verò renascentis Astronomiæ
gratia debetur. Et si proposito annue-
ris, non tam patriæ quàm Tibi debito-
rem constitues etiam Algebram , hoc
est, Mathesin Universalem. Ego floren-
tem virtutis Tuæ gloriam æternam op-
to , Tibique felicissimos annos preca-
tus, in clientelam Tuam receptum esse,
supra humanum solatium recreabor.

Ill^x & Exc^{ma} Dⁿⁱ V^x

*Hafnia, Anno
elo 1606 LVII.*

Deditissimus

ERASMIUS BARTHOLINUS,
Medicinæ & Mathematicum Profes-
sor Regius.

ERASMI BARTHOLINI

Ad Tractatum de Natura & Constitutione
Æquationum

EPISTOLA PRÆLIMINARIS

Ad Clarissimum Virum

CLAUDIUM HARDY,

Regis Galliae Consiliarium.

Quamvis sinistra huius seculi iudicia parum
apud me valeant, tamen à divulgandis
jussmodi quemlibet jure absterrent, quæ
diversas hominum censuras vitare ne-
queunt. Verum ego alto supercilio spretis calumniis, æ-
quitatis amantior & publicæ utilitatis, proposito desi-
stere nolui, tibiq; Vir Clarissime, exponere constitui, ea,
quæ ad præfationem utilia esse putavi, eò libentius, quò
cognoverim amicissimum tibi fuisse, dum in vivis esset,
D. De Beaune, in Curia Blesensi Consiliarium Regium.
Nam etsi vir hic fuerit pereleganti ingenio, & in tan-
tum laudandus, in quantum intelligi virtus potest; ta-
men hoc in eo maximum fuit, quòd Mathematica doctis-
simus, ut tempore æqualis Viro summo D. Des-Cartes,
ita Analytices speciosa peritiâ proximus. Quo momen-
to impulsus, dum Blesis linguæ Gallicæ exercendæ gra-
tiâ degerem, amicitiam tanti Viri colui, diligenterque
eâ familiaritate usus sum, quâ ipse me comiter ample-
ctebatur. Interea de rebus Mathematicis omnis fere
sermo.

sermo, & quoties alterutri de Analyticis sermocinari
volupe, toties nostra conferri colloquia necesse erat.
Vnde non obscure intellexi, quantis fuerat ingenii doti-
bus ac studiorum eminens, à quo, si publica negotia per-
mitterent, perfectio Algebrae maximè sperari posset.
Quare variis precibus hortatus sum, ut, quæ meditatus
erat, publicis destinaret usibus. Verùm ille multa sibi
obstare, occupationes tam publicas quàm privatas, va-
letudinem, operas amicorum, ea denique principia, quæ
ad intellectum suarum meditationum necessaria erant,
desiderari innuebat. Tum ego, & meam operam ipsi
polliceri paratissimam cæpi, & significare conscriptam
esse à me Isagogen Cartesianam, quorum neutrum pro-
posito moram asferre diutiùs posset. Quibus valde re-
creatus, de edendis operibus suis seriò cogitabat. Sed,
cum Arthriticis doloribus plus solito, lecto detineretur,
omnem à Mathematicis, ad corporis valetudinem, cu-
ram transferre cogeatur. Ego interim ad perlustran-
das reliquas Gallie provincias avocatus, per aliquod
tempus substiti Flexiæ; unde, cum varia negotia rever-
ti Lutetiam suaderent, placuit Castrum Blesense trans-
ire, ut de sanitate amici certior fierem. Quem in prædio
suo, cum doloribus Colicis acriter conflictantem, cum
deprehendissem, & affirmantem parùm prosperâ vale-
tudine ex eo tempore se usum fuisse; non mediocriter do-
lui, egregiis inventis fortunam tam esse adversam: mea
verò studia iteratò obtuli, promittens, me bono publico,
ejus-

ejusque gratiâ, quasvis subiturum molestias. Sed postquam relaxationis morbi nulla affulgeret spes, suspirans valedixi, iterque susceptum ingressus, Lutetiam redii. Vix ibi consueta studia revocaveram, cum literæ mihi redderentur ab hospite meo, Viro humanissimo, D. Antonio Marchais, in urbe Blesense tunc linguæ Gallicæ Professore, nunc verò Serenissimi Principis Gastonis, Ducis Aurelianensium, Mathematico, quibus nuntiabatur, agrum nostrum, oculorum usu privatum fuisse, temporibus solstitii Brumalis, ab acrimonia deflexionis Arthriticæ; exoptasse verò meam præsentiam tanto desiderio, ut de editione cogitationum suarum desperaret, nisi meâ operâ uti posset; adeoque rogasse, nisi grave nimis esset, operam quam pollicitus eram accommodarem. Exarserat eâ tempestate, bellum civile inter Regem Galliæ & Principes consanguineos, sedesque exercitus Principum erat Stampæ, quam obsidione aggrediebatur Dux exercitus Regii. Hac cum transeundum esset iis, qui ad Comitatum Blesensem pergunt; ancipiti curâ distractus, constitueram tamen longissimis viarum ambagibus, per Normanniam & Ducatum Andegavensem potius iter moliri, quàm spes amici deserere. Quippe ea pars territorii Parisiensis, Rothomagum versùs, tantum militibus vacavit. Cum inexpectato, propter adventum exercitus Lotharingici, solutâ obsidione Stampæ, ager Gastinensis, milite utriusque partis liberaretur, prædonibus tamen infestari vias significatum est.

H

Qua-

Quare arreptâ occasione, dissuadentibus amicis, itineri
me commisi, parvi aestimans, uno periculo, & amico pro-
desse, & præclara inventa redimere. Neque primas spes
fortuna destituit; quippe emenso periculosissimo itinere,
salvus revisi amicum, corpore satis sanum, nisi lumen
oculorum rapuisset ægritudo. Sed dubium itineris even-
tum deterior fortuna excepit; cum in primordio nostro-
rum operum, forsân quòd diligentius, quàm permetteret
anni tempus, Algebraicis subtilitatibus incumberem,
æstate mediâ, summis caloribus, sub Caniculam, in gra-
vissimum morbum ex febris syncho incidere. Et jam
de mea salute desperantibus Medicis, inopinatò ani-
mam efflavit Vir Amplissimus D. De Beaune. Nam,
cum amico aliquo, qui lecto ejus assiderat, de rebus Ana-
lyticis differentem, subitò destituit vox, deinde totum
corpus Vitalis calor reliquit, atque evasit perpetuam
valetudinem die 19 Augusti, Anno 1652, natus An-
no 1601 die 27 Sept. Sic præcipitantibus fatis, fefellit
spes omnium mortalitas. Ego cum mihi indicari incon-
sultum ducerent nostri, dum morbus nondum declina-
ret, ne ægritudinem aggravarent, non nisi post multum
tempus id rescivi. Tum nihil cunctatus, operam dedi,
ut fidei meæ committerentur, quæ relicta fuerant ad-
versaria, nullam curam mortuo deirectans, quam viro
destinaveram, publicæ utilitatis rationem habiturus.
Reluctantibus verò heredibus, cum alius pecuniâ soli-
citasset animos eorum; parum absuit, quin idem scri-
pta,

pta, qui auctorem, casus traxisset. Ergo omni studio demonstrare occæpi, perituros omnes defuncti conatus nisi mihi traderentur, sparsas chartas, sine ordine, sine numero, sine explicatione, notis & characteribus exaratas supputationes, non ab alio intelligi posse, quàm qui aliquo tempore cum ipso familiariter vixisset. Quibus perpensis, tandem obtinui propositum, sed majori labore, quàm successu. Quippe omnia diligentius inspiciens, animadverti plura affectata quàm effecta. Inter tot adversaria solummodo absolutum inveni opus de Angulo Solido, quod jam pridem in publicum edidissem, nisi sumptus, propter copiam figurarum, Bibliopole fastidivissent. Tractatus de Natura & Constitutione Aequationum ne litera quidem extabat, menti tamen D. de Beaune pleraque conformia esse differendo dum licuit cum viro comperi. Ex iis, quæ de Limitibus Aequationum conscripsi, quædam reperta sunt in adversariis, quibus, cum multa desiderarentur, ultimam manum imponere necesse habui. Præfationem denique, quam Author huic operi præmittendam duxit, ne religio esset omittere, addidi. Non ignoras, Vir Clarissime, me rogatu Authoris omnia Gallice prius conscripsisse, tibi quæ & aliis perlegenda dedisse & corrigenda; tamen nunc Latine edere coactus sum, ne diutius laterent. Nam et si tibi, dum in Italia degerem, adeo cordi fuerit horum scriptorum à me tibi relictorum editio, ut sumptibus propriis excudi parares, quo nomine multum tibi debe-

bunt posterì; tamen ne in Gallia quidem votum affec-
tus es. Quocirca, cum Amstelodami iterato prælo subji-
ceretur Geometria Renati Des-Cartes, id operam dedi,
ut hæc unà imprimerentur. Consentiente Verò Typo-
grapho modò Latine extarent, placuit Latinam inter-
pretationem in consilium adhibere, & potiùs authoris
precibus inobediens, quàm publici negligentior reputa-
ri. Quod perpendendum relinquo iis, qui me violata
fidei tacitè accusabunt. Subjunxissem alia, quorum
vestigia adhuc supersunt in adversariis, sed quædam
tanti indigent laboris, ut de restitutione quasi desperem,
alia remoratur multitudo figurarum: cuncta tamen
brevis videbit benevolus Lector, si Typographi obedie-
rint. Interea hisce frui, tuque Vir Clarissime, judi-
ca quid ex meis curis, & difficillimis itineribus, fra-
ctus colligi possit, tuum namque judicium erit instar
omnium. Quod si tamen & alii confiteantur, hinc
non exiguum emolumentum ad omnes redundare, rogo
ut id Manibus Viri Clarissimi Florimondi de Beaune
acceptum referant; errores Verò si offenderint, benigne
corrigant, meæque humanitati ascribant. Vale.

FLO-

FLORIMONDI DE BEAUNE

P R Æ F A T I O.

DEcreveram in publicum edere hosce tractatus, multò prolixiores atque perfectiores, proximo insequente anno. Verùm anni hujus initio conflictatus cum gravissimo ad oculos defluxu, oculorum usu privatus fui. Vnde proposito planè destituissem, nisi D. Erasmus Bartholinus operam mihi suam, ne mea circa hanc artem inventa oblivione sepulta jacerent, obtulisset. Ejus igitur auxilio hoc opus composui, ad quod intelligendum suppono Lectores jam in Geometria Renati Des-Cartes versatos, additisque in eam Notis, à nobis olim (non quidem animo illas in publicum edendi) concinnatis; ut & doctissimis Francisci à Schooten Commentariis; nec non Principiis Matheseos Universalis, seu Introductione ad Methodum Geometriæ Renati Des-Cartes, ab eodem Bartholino editâ.

H 3

PRIOR

PRIOR TRACTATVS
DE
NATURA
ET
CONSTITUTIONE
ÆQUATIONUM.

DE

D E
NATVRA ÆQVATIONVM.

C A P U T I.



Ultò faciliùs inueniemus Naturam & Constitutionem Æquationum ex earum generatione & comparatione cum similibus seu ejusdem formæ, quàm conferendo earum radices cum certis mediis Geometricè proportionalibus, ut præstitit Vieta.

Æquationes autem facilitatis gratiâ ita disponere libet, ut omnes termini ab una parte reperiantur æquales nihilo, ponendo ipsos ordine, prout gradatim per incognitæ quantitatis dimensiones descendunt. Primum enim terminum vocabimus, ipsam quantitatem incognitam, quæ plurimarum dimensionum existens nullis aliis quantitibus adficitur; secundum verò, in quo incognita quantitas unâ dimensione minor est; tertium in quo duabus; & sic deinceps, usque ad terminum omnino cognitum, quem pro ultimo habemus. Deinde, loca, ubi terminorum aliqui deficiunt, asterisco complebimus, quæ tum sub numero terminorum comprehenduntur. Hæc omnia beneficio transpositionis faciliè peraguntur.

Ex iis, quæ scripta & commentata sunt in Geometriam Renati des Cartes, nota est methodus cognoscendi, quot haberi possint radices in qualibet Æquatione: nimirum, posse Æquationem tot habere veras radices, quot mutationes signorum continuæ adfuerint, & quoties eadem signa se invicem sequuntur immutata, tot posse reperiri falsas radices: modo in numerum terminorum ii numerentur, qui deficiunt.

Porro, duas Æquationes similes esse dicimus seu ejusdem formæ, quando in utraque idem est primus terminus, & reliqui termini in utraque similiter sunt affecti; & si in una terminus aliquis absuerit, ut is quoque absit in altera. Nam cum similes sunt Æquationes, eandem habebunt constitutionem & naturam, & fieri poterit comparatio seu collatio singulorum terminorum unius cum singulis terminis correspondentibus alterius.

C A-

C A P U T II.

*De natura & constitutione Aequationum Quadratarum,
seu duarum dimensionum.*

Quando æquationes hæ sunt affectæ, reducuntur omnes ad tres formas sequentes:

$$xx + lx - mm \infty 0$$

$$xx - lx - mm \infty 0$$

$$xx - lx + mm \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad intelligendam naturam & constitutionem prioris æquationis, formetur per multiplicationem harum duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$ sequens æquatio: $xx - bx - bc \infty 0$. Supponendo
 $+c$

igitur c maiorem quàm b , eandem habebit formam atque prima propositarum $xx + lx - mm \infty 0$. & per consequens, binæ hæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat collatio unius cum altera; & per comparisonem terminorum secundorum habebimus $c - b \infty l$. Unde discimus, l esse differentiam inter falsam radicem c & veram b ; & cognitâ falsâ c , veram b esse æqualem ipsi $c - l$; & cognitâ verâ b , falsam c esse æqualem ipsi $b + l$.

Præterea, ex comparisonem postremorum terminorum habebimus mm æqualem bc . Unde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; & cognitâ falsâ c , veram b æqualem esse $\frac{mm}{c}$; & cognitâ verâ b , falsam c æqualem esse $\frac{mm}{b}$.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x + c \infty 0$, æquatio $xx - bx - bc \infty 0$.
 $+c$

In qua si supponamus b maiorem quàm c , erit ipsa ejusdem formæ cum secunda proposita $xx - lx - mm \infty 0$. Et per consequens duæ illæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo collatione unius cum altera, habebimus ex collatio-

latione secundorum terminorum $c \rightarrow b \infty - l$, vel $l \infty b - c$. Unde discimus, quod l est differentia inter veram radicem b & falsam c ; & si cognita fuerit falsa c , erit vera b æqualis $l + c$; & si fuerit cognita vera b , falsa c erit æqualis $b - l$.

Porro, per comparationem postremorum terminorum, habebimus $mm \infty bc$. Unde sequitur mm esse æquale rectangulo sub vera & falsa radice; & cognita falsâ c , veram b esse æqualem $\frac{mm}{c}$; & cognita verâ b , falsam c esse $\infty \frac{mm}{b}$.

3 *Propositio.*

Pro tertia supra posita æquatione, formemus, per multiplicationem duarum $x - b \infty 0$ & $x - c \infty 0$, æquationem sequentem $xx - bx + bc \infty 0$, & habebit eandem formam atque proposita

$-c$
tertia $xx - lx + mm \infty 0$, & consequenter hæc binæ æquationes erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Comparemus ergo unam cum altera, atque ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \infty l$. Unde discimus, quod l est summa duarum verarum radicum, & si una earum, exempli gratiâ, c , est cognita, reliqua b æquabitur $l - c$.

Præterea ex comparatione ultimorum terminorum habebimus $mm \infty bc$, hoc est, mm æquale rectangulo sub duabus veris radicibus, quarum si alterutra est nota, exempli gratiâ, c , altera b æquabitur $\frac{mm}{c}$.

Quantum ad æquationem quadratam $xx - mm \infty 0$, quæ non est affecta, ipsa oritur ex duabus sequentibus $x - m \infty 0$, & $x + m \infty 0$. Unde sequitur ipsam duas possidere radices, unam veram, alteram falsam, quarum utraque æquatur ipsi m .

CAPUT III.

De natura & constitutione Equationum Cubicarum seu tertiæ dimensionis, secundo termino carentium.

O Mnes hæc æquationes reducuntur ad tres sequentes formas :

$$x^3 + mmx - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 - mmx - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 - mmx + n^3 \infty 0.$$

I

1. Pro-

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem prioris æquationis propositæ, formemus per multiplicationem harum duarum $xx + bx + cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^3 * - bbx - bcc \propto 0$. Supposito autem cc majori quàm bb ,
 $+cc$

ipsa eandem habebit formam atque prima proposita $x^3 * + mmx - n^3 \propto 0$. & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat igitur illarum collatio, & per comparisonem tertiorum terminorum habebimus $cc - bb \propto mm$. Unde constat, si vera radix b cognoscitur, cc fore æquale $mm + bb$, & consequenter $xx + bx + mm + bb \propto 0$. quæ æquatio duas reliquas radices respicit, ac cum vera radice b concurrat ad formandam æquationem propositam.

Præterea, factâ comparatione ultimarum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$. Unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ similiter duas reliquas radices respicere, & cum vera b concurrere ad formationem propositæ æquationis.

2 *Propositio.*

Pro secunda æquatione proposita formetur rursus per multiplicationem duarum $xx + bx + cc \propto 0$ & $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 * - bbx - bcc \propto 0$. Supposito autem bb majori quàm cc , ha-
 $+cc$

bebit illa eandem formam atque secunda $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$, & per consequens habebunt eandem naturam & constitutionem. Fiat igitur collatio, & ex comparatione tertiorum terminorum habebimus $bb - cc \propto mm$. Unde constat, cc esse æquale $bb - mm$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $xx + bx + bb - mm \propto 0$ duas reliquas radices concernere. Porro, ex comparatione duorum postremorum terminorum, habebimus $n^3 \propto bcc$, unde sequitur cc esse æquale $\frac{n^3}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b}$ similiter ad duas reliquas respicere.

3 *Pro-*

3 Propositio.

Ad inveniendam naturam & constitutionem tertiæ æquationis propositæ, fiat ex duabus hisce $xx + bx - c \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 - b bx + b c \infty 0$, eandem habens formam cum

— $c c$
 tertia proposita $x^3 - m mx + n^3 \infty 0$. Unde & ipsæ eandem habebunt naturam atque constitutionem. Fiat ergo collatio, & per comparationem tertiorum terminorum habebimus $bb + c c \infty m m$. Unde constat, $c c$ æquale esse $m m - b b$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $xx + bx + bb - m n \infty 0$ ad duas reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $n^3 \infty b c c$, & per consequens $c c \infty \frac{n^3}{b}$. Quare, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ similiter duas reliquas radices concernet.

CAPUT IV.

De natura & constitutione Equationum Cubicarum seu trium dimensionum, tertio termino carentium.

HÆ æquationes reducuntur ad tres formas sequentes:

$$x^3 + lxx^* - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 - lxx^* - n^3 \infty 0.$$

$$x^3 - lxx^* + n^3 \infty 0.$$

1 Propositio.

Pro natura & constitutione primæ propositionis, fiat per multiplicationem harum duarum $xx + c x + b c \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 - b x x^* - b b c \infty 0$. Et suppositâ c majore

+ c
 quàm b , habebit ipsa eandem formam cum prima proposita $x^3 + lxx^* - n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ. Factâ ergo collatione, habebimus ex comparatione secundorum terminorum $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Unde constat, cog-

I 2

nitâ

nitâ verâ radice b , æquationem $xx + bx + bb + bl \infty 0$ duas
 $+l$

reliquas radices respicere.

Præterea, ex comparatione duorum ultimorum terminorum, habebitur $n^3 \infty b b c$. unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, cognitâ radice b , æquationem $xx + \frac{n^3}{b}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

2 Propositio.

Pro secunda propositione fiat ex multiplicatione harum duarum $xx + cx + bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio
 $x^3 - bxx^* - b b c \infty 0$. Et suppositâ b majore quàm c , erit ejus-
 $+c$

dem formæ cum secunda propositarum $x^3 - lxx^* - n^3 \infty 0$, adeoque erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur collatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $b - c \infty l$. Unde constat, c esse æqualem $b - l$; &, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $xx + bx + bb - bl \infty 0$ duas
 $-l$

reliquas radices respicere.

Porro per comparationem postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty b b c$. Unde sequitur c esse æqualem $\frac{n^3}{bb}$; &, si vera radix fuerit cognita, hanc æquationem $xx + \frac{n^3}{bb}x + \frac{n^3}{b} \infty 0$ duas reliquas radices concernere.

3 Propositio.

Pro tertia propositione formemus ex duabus $xx - cx - bc \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^3 - cxx^* + b b c \infty 0$, quæ
 $-b$

habebit eandem formam atque tertia æquationum propositarum $x^3 - lxx^* + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Quare factâ collatione, per comparationem secundorum terminorum habebimus $c + b \infty l$. Unde discimus, quod c æquetur $l - b$; &, si vera radix b sit cognita, quod æquatio $xx - bx - bb - bl \infty 0$ ad duas reliquas radices investigan-
 $-l$

das referri debeat.

Præ-

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $n^3 \propto b b c$, unde sequitur c æquari $\frac{n^3}{b}$; & cognita verâ radice b , hanc æquationem $x x - \frac{n^3}{b} x - \frac{n^3}{b} \propto 0$ reliquis duabus inveniendis inferire.

C A P U T V.

De natura & constitutione Equationum Cubicarum seu trium dimensionum, in quibus omnes termini extant.

Æ Quationes hæc reducuntur ad septem formas sequentes:

$$\begin{aligned} x^3 - l x x + m m x - n^3 &\propto 0. \\ x^3 + l x x - m m x - n^3 &\propto 0. \\ x^3 - l x x - m m x - n^3 &\propto 0. \\ x^3 + l x x + m m x - n^3 &\propto 0. \\ x^3 - l x x + m m x + n^3 &\propto 0. \\ x^3 + l x x - m m x + n^3 &\propto 0. \\ x^3 - l x x - m m x + n^3 &\propto 0. \end{aligned}$$

I Propositio.

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione $x x - c x + d d \propto 0$ per $x - b \propto 0$, æquatio sequens $x^3 - b x x + d d x - b d d \propto 0$. atque eandem habebunt naturam & constitutionem.

Factâ ergo comparatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $b + c \propto l$, vel $c \propto l - b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $d d + b c \propto m m$, hoc est, $d d \propto m m + b b - b l$, quoniam c est inventa æquari $l - b$. Unde apparet, cognita verâ radice b , æquationem hanc $x x - l x + m m + b b - b l \propto 0$ duas reliquas radices

respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $b d d \propto n^3$. unde constat, $d d$ æquari $\frac{n^3}{b}$; & cognita verâ radice b , æquationem hanc $x x - l x + \frac{n^3}{b} \propto 0$ duas reliquas radices concernere.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ æquatio hæc $x^3 - bxx - bcx - bdd \infty 0$.

+ c + dd

& suppositâ c majore quàm b , & bc majore quàm dd , habebit eandem formam, quam propositio secunda $x^3 + lxx - mxx - n^3 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \infty mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + lx + bb + bl - mm \infty 0$ duabus reliquis radicibus investi-

+ b

gandis esse utilem. Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $bdd \infty n^3$. Unde sequitur dd fore æqualem $\frac{n^3}{b}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc

$xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$ reliquis duabus inservituram.

+ l

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \infty 0$ per $x - b \infty 0$ eadem æquatio $x^3 - bxx - bcx - bdd \infty 0$.

+ c + dd

Et suppositâ b majore quàm c , & bc majore quàm dd , erit ejusdem formæ cum tertia propositarum $x^3 - lxx - mxx - n^3 \infty 0$, & consequenter ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ ergo adæquatione, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b \infty l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum habebimus $dd - bc \infty mm$, hoc est, substituto valore invento ipsius c , erit $dd \infty bb - bl - mm$. Unde constat, quod, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $xx + bx + bb \infty 0$

• - l - bl

- mm

ad duas investigandas reliquas adhiberi possit. Denique, ex collatione

latione postremorum terminorum, habebitur $bdd \propto n^3$. Unde sequitur, dd æuari $\frac{n^3}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas quærendas esse utilem.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum fiat ex multiplicatione $xx + cx + dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ eadem æquatio $x^3 - bxx - bcx - bdd \propto 0$. Et

$$+c \quad +dd$$

suppositâ c majore quàm b , & dd majore quàm bc , erunt ejusdem formæ ac quarta propositio $x^3 + lxx + mmx - n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ ergo ad æquationem, ex collatione secundorum terminorum habebimus $c - b \propto l$, seu $c \propto l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $dd - bc \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bb + bl + mm$. Unde constat, cognitâ vera radice b , hanc æquationem $xx + bx + bb + bl + mm \propto 0$

$$+l$$

duas reliquas radices respicere. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $bdd \propto n^3$. Unde sequitur, dd fore æquale $\frac{n^3}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$xx + bx + \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad indagandas duas reliquas adhiberi posse.

$$+l$$

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione fiat ex multiplicatione $xx - cx - dd \propto 0$ per $x - b \propto 0$ æquatio $x^3 - cxx - ddx + ddb \propto 0$. Et supposito bc

$$-b \quad +bc$$

majore quàm dd , erit ejusdem formæ cum quinta propositarum $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$, & consequenter ejusdem naturæ & constitutionis erunt. Factâ ergo ad æquationem, ex comparatione secundorum terminorum, habebimus $l \propto c + b$, vel $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc est, restituto valore ipsius c invento, erit $dd \propto bl - bb - mm$. Unde discimus, cognitâ radice verâ b , æqua-

æquationem hanc $xx - lx - bl + bb + n.m \infty 0$ duabus reli-

+b

quis inveniendis esse usui. Denique ex collatione postremorum terminorum habebimus $n^3 \infty bdd$. Unde colligitur dd æquari $\frac{n^3}{b}$; & cognita radice verâ b , hanc æquationem $xx - lx - \frac{n^3}{b} \infty 0$

+b

duabus reliquis inveniendis inservire.

6 Propositio.

Pro sexta propositione formetur ex duabus $xx + cx - dd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \infty 0$. Et, suppositâ

-b -bc

c majori quàm b , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositarum $x^3 + lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde ex collatione tertiorum terminorum crit $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. Unde constat, si vera radix b sit cognita, hanc æquationem $xx + lx - mm \infty 0$, pro duabus reliquis inveniendis

+b +bl

+bb

usui futuram. Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $ddb \infty n^3$; & per consequens $dd \infty \frac{n^3}{b}$; adeoque, cognita verâ radice b , hæc æquatio $xx + lx - \frac{n^3}{b} \infty 0$ ad investigandas duas reliquas utilis erit.

7 Propositio.

Pro septima propositione formetur ex duabus $x - b \infty 0$ & $xx + cx - dd \infty 0$ æquatio $x^3 + cxx - ddx + ddb \infty 0$. Sup-

-b -bc

positâ autem b majore quàm c , habebit ipsa eandem formam cum septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Factâ igitur comparatione, orietur ex collatione secundorum terminorum,

$l \infty b -$

$l \propto b - c$, seu $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $mm \propto bc + dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto mm - bb + bl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $xx + bx - mm + bb - bl \propto 0$ ad in-

veniendas duas reliquas inservire. Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $ddb \propto n^3$, unde erit dd æquale $\frac{n^3}{b}$; & , cùm cognoscitur vera radix b , hæc æquatio $xx + bx - \frac{n^3}{b} \propto 0$ ad duas reliquas inveniendas adhiberi poterit.

C A P U T VI.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentium.

H Ujus generis æquationes ad tres formas sequentes reducuntur:

$$\begin{aligned} x^4 + n^3x - p^4 &\propto 0. \\ x^4 + n^3x - p^4 &\propto 0. \\ x^4 + n^3x + p^4 &\propto 0. \end{aligned}$$

1 Propositio.

Pro natura & constitutione prioris propositionis formemus ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 + c^3x - bc^3 \propto 0$. Supposito verò c^3 majore quàm b^3 ,

habebit ea eandem formam atque prima propositio $x^4 + n^3x - p^4 \propto 0$, & per consequens erit ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo comparatio, & ex collatione quattorum terminorum habebitur $c^3 - b^3 \propto n^3$, hoc est, $c^3 \propto n^3 + b^3$. unde cognoscimus, quando innotescit vera radix b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx + n^3 + b^3 \propto 0$ spectare ad investigationem trium reliquarum radicum.

Præterea, collatis ultimis terminis, sit $p^4 \propto bc^3$: unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , æquationem hanc

K

$x^3 +$

$x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas investigandas posse usurpari.

2. *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx + c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^{4**} + c^3x - bc^3 \infty 0$. Et, si ponatur b^3

tur b^3 major quàm c^3 , habebit illa eandem formam atque secunda propositarum $x^{4**} - n^3x - p^4 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quatorum terminorum habebimus $c^3 - b^3 \infty -n^3$, hoc est, $c^3 \infty b^3 - n^3$. Unde cognoscimus, inventâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 - n^3 \infty 0$, ad tres reliquas radices respicere. Porro, comparatis inter se terminis ultimis, habebimus $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas radices concernere.

3. *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 + bxx + bbx - c^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquatio $x^{4**} - c^3x + bc^3 \infty 0$, & habebit eandem

formam atque tertia propositarum $x^{4**} - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat jam comparatio, & ex collatione quatorum terminorum habebimus $c^3 + b^3 \infty n^3$, hoc est, $c^3 \infty n^3 - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - n^3 + b^3 \infty 0$ ad tres reliquas investigandas adhiberi posse. Præterea ex collatione ultimorum habebitur $p^4 \infty bc^3$. Unde sequitur, c^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + bbx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas esse utilem.

C A-

CAPUT VII.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio & quarto termino carentium.

Æquationes hæc ad sequentes tres formas reducuntur:

$$x^4 + lx^3 + px^2 - p^2 \infty 0.$$

$$x^4 - lx^3 + px^2 - p^2 \infty 0.$$

$$x^4 - lx^3 + px^2 + p^2 \infty 0.$$

1 *Propositio.*

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione harum duarum $x^2 + exx + bex + bbe \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 + ex^2 + b^2x - b^3 \infty 0$.

Suppositâ vero e majore quàm b , habebit illa eandem formam atque prima propositio $x^3 + lx^2 + px^2 - p^2 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $e - b \infty l$, hoc est, $e \infty l + b$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + blx + b^2 + bbl \infty 0$ tribus reliquis

investigandis inservire. Deinde, collatis ultimis terminis, habebitur $p^2 \infty b^3e$, unde sequitur, e æuari $\frac{p^2}{b^3}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + \frac{p^2}{b^3}xx + \frac{p^2}{b^2}x + \frac{p^2}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagandas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione fiat ex duabus $x^2 + exx + bex + bbe \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 + ex^2 + b^2x - b^3 \infty 0$. Et

supponendo b superare ipsam e , habebit illa eandem formam atque secunda propositio $x^3 - lx^2 + px^2 - p^2 \infty 0$, & consequenter erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & collatis secundis terminorum habebimus $-b + e \infty -l$, hoc est,

K 2

est; $c \propto b - l$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + b^2x + b^3 - bbl \propto 0$ ad tres reliquas investi-

gandas usurpari posse. Præterea, comparando postremos terminorum, habebimus $p^4 \propto b^3 c$. Unde sequitur, c æquari $\frac{p^4}{b^3}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + \frac{p^4}{b^3}xx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ tribus reliquis inservire.

3 Propositio.

Pro tertia propositione formetur ex duabus $x^3 - cxx - b^2c$ & $x - b \propto 0$ æquatio hæc $x^4 - cx^3 + b^2cx - b^3 \propto 0$,

& erit ejusdem formæ atque tertia propositarum $x^4 - lx^3 + p^4x - p^4 \propto 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx - b^2l + b^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire. Por-

ro, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto b^3 c$, & per consequens $c \propto \frac{p^4}{b^3}$; adeoque, cognitâ verâ radice b , poterit æquatio $x^3 - \frac{p^4}{b^3}xx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas radices investigandas adhiberi.

Non operæ pretium duximus meminisse æquationum quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus desunt: quia illæ omnes reducuntur ad Quadratas, ac idcirco earum natura & constitutio eodem modo habetur.

CAPUT VIII.

De natura & constitutione Aequationum quatuor dimensionum, secundo termino carentium.

Æquationes hæc reducuntur ad septem formas sequentes :

$$\begin{aligned} x^4 & - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0. \\ x^4 & + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0. \\ x^4 & - m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0. \\ x^4 & + m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0. \\ x^4 & - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0. \\ x^4 & + m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0. \\ x^4 & - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0. \end{aligned}$$

I Propositio.

Ad cognoscendam naturam & constitutionem primæ propositionis, fiat ex multiplicatione duarum $x^3 + b x x - c c x + d^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 - c c x x + d^3 x - b d^3 \infty 0$. quæ eandem

$$- b b \quad + b c c$$

dem habebit formam atque primæ propositionum $x^4 - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione tertiorum terminorum habebimus $m m \infty c c + b b$, hoc est, $c c \infty m m - b b$. Deinde, comparando terminos quartos, erit $n^3 \infty d^3 + b c c$, hoc est, restituendo valorem $c c$ inventum, habebitur $d^3 \infty n^3 + b^3 - b m m$. Unde comperimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + b x x + n^3 \infty 0$ tribus reliquis indagandis inservire.

$$- m \quad + b^3$$

$$- b m m$$

Præterea, conferendo inter se terminos ultimos, habebimus $p^4 \infty b d^3$. Unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & inventâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + b x x - m m x + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas quærendas adhiberi posse.

2 *Propositio.*

Pro secunda fiat ex multiplicatione $x^3 + bxx + cex + d^3 \infty 0$ &
 per $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^4 + cexx + d^3x - d^3b \infty 0$.
 $-bb \quad -ccb$

Supposito verò cc majore quàm bb , & ccb majore quàm d^3 , ha-
 bebit illa eandem formam cum secunda propositarum $x^4 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ &
 constitutionis. Fiat igitur adæquatio, & ex comparatione tertio-
 rum terminorum habebimus $mm \infty cc - bb$, hoc est, $cc \infty mm + bb$.
 Deinde, collatis quartis terminis, erit $-cb^3 + d^3 \infty -n^3$, hoc est,
 restituendo valorem cc inventum, habebitur $d^3 \infty bmm +$
 $b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , æquationem
 $x^3 + bxx + mmx + bmm \infty 0$, tribus reliquis investigandis inservire.
 $+bb \quad +b^3$
 $-n^3$

Præterea, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty d^3b$.
 unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , æquatio-
 nem hanc $x^3 + bxx + mmx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas indagan-
 $+bb$
 das posse usurpari.

3 *Propositio.*

Pro tertia, fiat ex duabus his $x^3 + bxx + cex + d^3 \infty 0$ &
 $x - b \infty 0$ æquatio $x^4 + cexx + d^3x - d^3b \infty 0$. Et, supposi-
 $-bb \quad -ccb$

to bb majore quàm cc , & ccb majore quàm d^3 , habebit ipsa eandem
 formam atque tertia propositio $x^4 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per
 consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Unde factâ
 adæquatione, ex collatione tertiorum terminorum habebimus
 $-mm \infty -bb + cc$, hoc est, $cc \infty bb - mm$. Deinde, collatis quartis
 terminis, habebimus $-n^3 \infty -ccb + d^3$, hoc est, substituendo
 valorem cc inventum, erit $d^3 \infty b^3 + bmm - n^3$. unde patet, si
 cognita sit radix vera b , hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x + b^3 \infty 0$
 $-m^3 + bm^2$
 $-n^3$

tri-

tribus reliquis investigandis inservire. Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $p^* \propto b d^3$, ac proinde $d^3 \propto \frac{p^*}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , poterit æquatio $x^3 + bxx + \frac{bb}{m}x + \frac{p^*}{b} \propto 0$ ad reliquas tres investigandas usurpari.

4 *Propositio.*

Pro quarta propositarum formemus ex duabus $x^3 - bxx + ccx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 + ccxx + d^3x - d^3b \propto 0$.

Et supposito cc majore quàm b , ac d^3 majore quàm ccb , habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 + mxx + n^3x - p^* \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc - bb$, hoc est, $cc \propto mm + bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - cc b$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto b^3 + bmm + n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx + mxx + bb$

$+ b^3 \propto 0$ tribus reliquis quærendis inservire. Denique, collatis $+ bmm$
 $+ n^3$
ultimis terminis, erit $d^3 b \propto p^*$; & per consequens $d^3 \propto \frac{p^*}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + bxx + mxx + \frac{p^*}{b} \propto 0$ ad reliquas tres indagandas erit adhibenda.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus $x^3 + bxx - ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 - ccxx - d^3x + d^3b \propto 0$. Et

supposito ccc majore quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam atque quinta propositarum $x^4 - mxx + n^3x + p^* \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando tertios terminos habebimus $mm \propto cc + bb$, hoc

hoc est, $cc \propto mm - bb$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto bcc - d^3$; ideoque, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto bmm - b^3 - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mnx - bmm \propto 0$ reliquis

$$\begin{array}{r} +bb \\ +b^3 \\ +n^3 \end{array}$$

tribus quærendis infervituram. Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $d^3 b \propto p^4$. Unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - mnx - \frac{p^4}{b} \propto 0$

$$\begin{array}{r} +bb \\ -\frac{p^4}{b} \end{array} \propto 0$$

ad tres reliquas investigandas posse adhiberi.

6 Propositio.

Pro sexta propositione formemus ex duabus $x^3 + bxx + ccx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hanc æquationem $x^4 + cxx - d^3x - bb -ccb$

$+d^3b \propto 0$. & supponendo c majus quàm bb , habebit ipsa eandem formam cum sexta propositarum $x^4 + mnx - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens erit utraque ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio & per comparisonem secundorum terminorum habebimus $m \propto c - bb$, hoc est, $cc \propto mm + bb$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum, erit $d^3 \propto n^3 - bmm - b^3$. Unde patet, datâ verâ radice b , æquationem $x^3 + bxx + mnx + bb$

$-n^3 \propto 0$ ad trium reliquarum investigationem posse usurpari.

$$\begin{array}{r} +bmm \\ +b^3 \end{array}$$

Postremò, comparando ultimos terminos, erit $p^4 \propto d^3b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + mnx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres quærendas esse adhibendam.

$$+bb$$

7 *Propositio.*

Pro septima propositarum fiat ex duabus $x^3 + bxx + cex - d^3 \propto 0$
 & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^3 + cex - d^3 x + bd^3 \propto 0$. Et sup-
 $-bb$ $-bcc$

posito bb majore quàm cc , habebit ipsa eandem formam atque
 septima propositio $x^3 - mxx - n^3 x + p^3 \propto 0$, & per conse-
 quens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo ad æqua-
 tio, & comparando tertios terminos habebimus $-mm \propto -bb$
 $+cc$, hoc est, $cc \propto bb - mm$. Deinde, collatis quartis termi-
 nis, erit $n^3 \propto d^3 + bcc$, hoc est, restituendo valorem cc inventum,
 erit $d^3 \propto n^3 - b^3 + bmm$. unde constat, cognitâ verâ radice b ,
 hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3 x - n^3 \propto 0$ ad reliquas tres
 $-mm$ $+b^3$
 $-bmm$

investigandas utilem esse. Postremò, comparando ultimos ter-
 minos, habebimus $p^3 \propto bd^3$. unde discimus, d^3 æquari $\frac{p^3}{b}$; & co-
 gnitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3 x - \frac{p^3}{b} \propto 0$
 $-m^3b$
 ad reliquas tres quærendas adhiberi posse.

CAPUT IX.

*De natura & constitutione Equationum quatuor dimen-
 sionum, quarto termino carentium.*

HÆ æquationes reducuntur omnes ad septem sequentes for-
 mulas:

$$\begin{aligned} x^4 - lx^3 + mxx^2 - p^4 &\propto 0. \\ x^4 + lx^3 - mxx^2 - p^4 &\propto 0. \\ x^4 - lx^3 - mxx^2 - p^4 &\propto 0. \\ x^4 - lx^3 + mxx^2 - p^4 &\propto 0. \\ x^4 - lx^3 + mxx^2 + p^4 &\propto 0. \\ x^4 + lx^3 - mxx^2 + p^4 &\propto 0. \\ x^4 - lx^3 - mxx^2 + p^4 &\propto 0. \end{aligned}$$

L

I Pro-

1 *Propositio.*

Ad investigandam naturam & constitutionem primæ propositionis, formemus ex duabus $x^3 - cxx + ddx + bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ æquationem hanc $x^4 - cx^3 + ddx^2 - bdd \infty 0$;

$$-b \quad +bc$$

habebitque ipsa eandem formam atque prima propositio $x^4 - lx^3 + mxx^2 - p^4 \infty 0$, & per consequens duæ illæ æquationes ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, seu $c \infty l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, erit $mm \infty d d + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty mm - bl - bb$. unde constat, si cognoscitur verâ radix b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mxx + bmm \infty 0$ ad reliquas tres in-

$$\begin{array}{r} -b \quad -bl \quad -bbl \\ -bb \quad -b^3 \end{array}$$

vestigandas inservire.

2 *Propositio.*

Pro secunda propositione formemus ex duabus $x^3 + cxx + ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 + cx^3 + ddx^2 - bdd \infty 0$;

$$-b \quad -bc$$

$* - ddbb \infty 0$. Suppositâ verò c majore quàm b , & bc majore quàm dd , habebit illa eandem formam atque secunda proposita- rum $x^4 + lx^3 - mxx^2 - p^4 \infty 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, erit $-mm \infty dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \infty bl + bb - mm$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx + bbl \infty 0$ ad reliquas tres quærendas

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +b^3 \\ -m^2 \quad -bm^2 \end{array}$$

posse adhiberi.

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty b b d d$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{bb}$; & cùm cognoscitur vera radix

radix b , hanc æquationem $x^3 + lxx + b lx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ tres reli-

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \\ -mm \end{array}$$

quas radices concernere.

3 *Propositio.*

Pro tertia propositione, fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \propto 0$
& $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^3 + c x^2 + d d x x^* - b b d d \propto 0$. Sup-

$$\begin{array}{r} -b \\ -bc \end{array}$$

positis autem b majore quàm c , & bc majore quàm dd , habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^3 - l x^2 - m m x x^* - p^4 \propto 0$, & per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat jam adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $-l \propto c - b$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, erit $-m m \propto d d - b c$, hoc est, restituendo valorem c inventum, habebitur $dd \propto b b + b l - m m$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + b x x + b b x + b b l \propto 0$

$$\begin{array}{r} -l \\ +bl \\ -m^2 \\ -bm^2 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto b b d d$. unde sequitur, dd æquari $\frac{p^4}{b b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æqua-

tionem $x^3 + b x x + b b x + \frac{p^4}{b} \propto 0$ pro tribus reliquis usurpari.

$$\begin{array}{r} -l \\ +bl \\ -mm \end{array}$$

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx + bdd \propto 0$
& $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^3 + c x^2 + d d x x^* - b b d d \propto 0$. Sup-

$$\begin{array}{r} -b \\ -bc \end{array}$$

positis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^3 + l x^2 + m m x x^* - p^4 \propto 0$, ac per consequens duæ illæ æquationes eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, comparatis quæ secundis terminis habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde,

L 2

de,

de, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bl + bb$, unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$x^3 + lxx + mmx + bmm \propto 0 \text{ ad tres reliquas adhiberi.}$$

$$\begin{array}{r} +b \quad +bl \quad +bbl \\ +bb \quad +b^3 \end{array}$$

Denique, comparando ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bbdd$. unde sequitur, dd æuari $\frac{p^4}{bb}$; &, cognitâ verâ radice b ,

hanc æquationem $x^3 + bxx + mmx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ +bb \end{array}$$

quærendas esse utilem.

5 Propositio.

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - bdd \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 - ddx x^* + bbdd \propto 0$. Et

$$-b \quad +bc$$

supponendo bc majus quàm dd , erit ipsa ejusdem formæ cum quinta propositione $x^4 - lx^3 + mmx x^* + p^4 \propto 0$, ac per consequens eandem habebunt naturam & constitutionem. Fiat jam adæquatio, & comparatis secundis terminis, habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \propto bc - dd$, hoc est, restituendo valorem inventum c , erit $dd \propto bl - bb - mm$. unde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx - bllx - bbl \propto 0$ ad reli-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +bmm \\ +mm \quad +b^3 \end{array}$$

quas tres quærendas adhiberi posse.

Postremò, comparando ultimos terminos, habebimus $bbdd \propto p^4$, ac per consequens $dd \propto \frac{p^4}{bb}$. unde, cognitâ verâ radice b ,

hæc æquatio $x^3 - lxx - bllx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ pro tribus reliquis in-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ +mm \end{array}$$

vestigandis inservire poterit.

6 Pro-

6 *Propositio.*

Pro sexta propositarum, fiat ex duabus $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$
 & $x - b \infty 0$ hæc æquatio $x^3 + cx^2 - ddx + b^2dd \infty 0$.
 $-b \quad -bc$

Supponendo autem c majorem quàm b , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio, ac per consequens ejusdem erunt natura & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & comparando secundos terminos habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, ex collatione tertiorum terminorum, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, erit $dd \infty mm - bl - bb$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + lxx - mmx - bmm \infty 0 \text{ tres reliquas radices respicere.} \\ +b \quad +bl \quad +bbl \\ +bb \quad +b^3 \end{array}$$

Postremo, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \infty bdd$, ac per consequens $dd \infty \frac{p^4}{bb}$; adeoque, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres

$$\begin{array}{r} +b \quad +bl \\ +bb \end{array}$$

reliquis investigandas erit adhibenda.

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - bdd \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^3 + cx^2 - ddx + b^2dd \infty 0$.
 $-b \quad -bc$

Suppositâ autem b majore quàm c , habebit ipsa eandem formam atque septima propositarum $x^3 - lxx - mmx + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt natura & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c - b \infty -l$, hoc est, $c \infty b - l$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty mm - bb + bl$. unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + bxx - mmx - bmm \infty 0 \\ -l \quad -bl \quad -bbl \\ +bb \quad +b^3 \end{array}$$

L 3

tribus

tribus reliquis intervire. Denique, comparando postremos terminos, habebimus $p^4 \propto b b d d$, ac per consequens $d \propto \frac{p^4}{b b}$; &c, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + b x x - m m x - \frac{p^4}{b} \propto 0$

$$\begin{array}{r} -l \\ -bl \\ +bb \end{array}$$

ad tres reliquas erit referenda.

C A P U T X.

De natura & constitutione Æquationum quatuor dimensionum, tertio termino carentium.

R Educuntur autem hæ æquationes ad septem sequentes formulas:

$$\begin{array}{l} x^4 - l x^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * - n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * - n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0. \\ x^4 - l x^3 * + n^3 x + p^4 \propto 0. \\ x^4 + l x^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0. \\ x^4 - l x^3 * - n^3 x + p^4 \propto 0. \end{array}$$

I *Propositio.*

Pro natura & constitutione primæ propositionis, formemus, ex duabus $x^3 - c x x - b c x + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hanc æquationem $x^4 - c x^3 * + d^3 x - b d^3 \propto 0$, & habebit ipsa eandem

$$\begin{array}{r} -b \\ +bbc \end{array}$$

formam atque prima propositio $x^4 - l x^3 * + n^3 x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & ex comparatione secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 + b b c$, hoc est, restituendo valorem inventum c , erit $d^3 \propto n^3 - b b l + b^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - l x x - b l x + n^3 \propto 0$

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \\ +b^3 \\ -bbl \end{array}$$

ad tres reliquas quærendas adhiberi posse. Denique, comparando
ulti-

ultimos terminos, habebimus $p^2 \propto b d^2$. unde sequitur, d^2 æqua-
ri $\frac{p^2}{b}$; & cognita verâ radice b , hæc æquatio $x^2 - lxx - blx + \frac{p^2}{b} \propto 0$
 $+b \quad +bb$
ad reliquas tres erit referenda.

2. *Propositio.*

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^2 + exx + bex + d^2 \propto 0$
& $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^2 + ex^2 + d^2 x - d^2 b \propto 0$. Suppo-
 $-b \quad -lbc$
sitis autem e majore quàm b , & bbe majore quàm d^2 , habebit ipsa
eandem formam atque secunda propositio $x^2 + lx^2 - n^2 x - p^2 \propto 0$,
ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat
ergo adæquatio, & per comparisonem secundorum termino-
rum habebimus, $l \propto e - b$, hoc est, $e \propto l + b$. Deinde, collatis
quartis terminis, habebimus $d^2 - bbe \propto -n^2$, hoc est, substi-
tuendo valorem e inventum, erit $d^2 \propto bbl + b^3 - n^2$. Unde pa-
ter, cognita verâ radice b , hæc æquationem $x^2 + lxx + blx + bbl \propto 0$
 $+b \quad +bb \quad +b^3$
 $-n^2$

tribus reliquis inservire. Postremò, per comparisonem ultimo-
rum terminorum, habebimus $p^2 \propto b d^2$, ac per consequens $d^2 \propto \frac{p^2}{b}$;
& cognita verâ radice b , hæc æquatio $x^2 + lxx + blx + \frac{p^2}{b} \propto 0$
 $+b \quad +bb$
ad tres reliquas investigandas erit utilis.

3. *Propositio.*

Pro tertia propositione fiat ex duabus, $x^2 + exx + bex + d^2 \propto 0$
& $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^2 + ex^2 + d^2 x - d^2 b \propto 0$. Suppo-
 $-b \quad -lbc$
sitis autem b majore quàm e , & bbe majore quàm d^2 , habebit ipsa
eandem formam atque tertia propositio $x^2 + lx^2 - n^2 x - p^2 \propto 0$,
ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat
itaque earum adæquatio, & per comparisonem secundorum ter-
minorum habebimus $l \propto e - b$, hoc est, $e \propto l + b$. Deinde, con-
ferendo quartos terminos, habebimus $d^2 - bbe \propto -n^2$, hoc est,
restit-

restituendo valorem c inventum, erit $d^3 \propto lbb + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + lxx + blx + lbb \propto 0 \\ +b \quad +bb \quad +b^3 \\ -n^3 \end{array}$$

lem. Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio

$$\begin{array}{r} x^3 + lxx + blx + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ +b \quad +bb \end{array}$$

4 *Propositio.*

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + bcx + d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + cx^3 + d^3x - d^3b \propto 0$. Sup-

positis autem c majore quàm b , & d^3 majore quàm bbc , habebit ipsa eandem formam atque quarta propositarum $x^4 + lx^3 + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secundis terminis habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto b + l$. Deinde, comparando quartos terminos, habebimus $n^3 \propto d^3 - bbc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 + b^3 + bbl$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 + bxx + bbx + n^3 \propto 0 \\ +l \quad +bl \quad +b^3 \\ +bbl \end{array}$$

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto d^3 b$, ac per consequens $d^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b , hæc æ-

$$\begin{array}{r} quatio x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \propto 0 \\ +l \quad +bl \end{array}$$

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - bcx - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 - d^3x + b d^3 \propto 0$. suppo-

nendo autem bbc majus quàm d^3 , habebit ipsa eandem formam quinta

atque quinta propositio $x^4 - lx^3 + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex collatione quattorum terminorum, habebimus $n^3 \propto b b c - d^3$, hoc est, $d^3 \propto b b l - b^3 - n^3$, substituto nempe valore c invento. Unde patet, cum innotescit vera radix b , hanc æquationem $x^3 - lx - blx - b b l \propto 0$ tribus

$$\begin{array}{r} +b \\ +b \\ +b^3 \\ +n^3 \end{array}$$

bus reliquis inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $p^4 \propto d^3 b$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lx - blx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas investigandas esse adhibendam.

$$\begin{array}{r} +b \\ +b \\ +b^3 \end{array}$$

6 Propositio.

Pro sexta propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + b c x - d^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, æquatio $x^4 - c x^3 + d^3 x + b d^3 \propto 0$. Suppo-

$$\begin{array}{r} -b \\ -b c \end{array}$$

sitâ autem c majore quàm b , habebit ipsa eandem formam atque sexta proposituram $x^4 + lx^3 - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparandoque secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, ex collatione quattorum terminorum, habebimus $n^3 \propto d^3 + b b c$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $d^3 \propto n^3 - b b l - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lx + blx - n^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \\ +b \\ +b b \\ +b^3 \end{array}$$

Denique, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto b d^3$. unde sequitur, d^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lx + blx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres esse referendam.

$$\begin{array}{r} +b \\ +b \\ +b b \end{array}$$

7 *Propositio.*

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + bcx - d^3 \propto 0$
 & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + c x^3 - d^3 x + b d^3 \propto 0$. Suppo-

nendo autem b majorem quàm c , habebit ipsa eandem formam at-
 que septima propositarum $x^4 - l x^3 - n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per conse-
 quens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo ad æqua-
 tio, comparandoque secundos terminos habebimus $c - b \propto -l$,
 hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, ex collatione quatorum termino-
 rum, habebimus $n^3 \propto d^3 + b b c$, hoc est, restituendo valorem c
 inventum, fiet $d^3 \propto n^3 - b^3 + b b l$. unde sequitur, cognitâ verâ
 radice b , hanc æquationem $x^3 + b x x + b b x - n^3 \propto 0$ reliquis

tribus inservire.

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto d^3 b$,
 unde constat, d^3 æuari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , æquationem
 hanc $x^3 + b x x + b b x - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse referendam.

C A P U T XI.

*De natura & constitutione Equationum quatuor dimen-
 sionum, in quibus nullus terminus deest.*

R Educuntur hæ æquationes omnes ad quindecim sequentes
 formas:

$$\begin{aligned} x^4 - l x^3 + m m x x - n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 - l x^3 + m m x x + n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 - l x^3 - m m x x - n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 - l x^3 - m m x x + n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 + l x^3 + m m x x - n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 + l x^3 - m m x x - n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 + l x^3 - m m x x + n^3 x + p^4 &\propto 0. \\ x^4 - l x^3 + m m x x - n^3 x - p^4 &\propto 0. \end{aligned}$$

$x^4 -$

$$\begin{aligned} x^4 - lx^3 + mxx + n^3x - p^4 \infty 0. \\ x^4 - lx^3 - mxx - n^3x - p^4 \infty 0. \\ x^4 - lx^3 - mxx + n^3x - p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 + mxx - n^3x - p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 + mxx + n^3x - p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 - mxx - n^3x - p^4 \infty 0. \\ x^4 + lx^3 - mxx + n^3x - p^4 \infty 0. \end{aligned}$$

1 Propositio.

Pro natura & constitutione primæ propositionis dignoscendâ fiat ex duabus hisce, $x^3 - cxx + ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cxx + ddx - f^3x + bf^3 \infty 0$, quæ eandem

habebit formam atque prima propositarum $x^4 - lx^3 + mxx - n^3x + p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $m \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty m - bl + bb$. Tum per collationem quattorum terminorum habebimus $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \infty n^3 + bbl - bmm - b^3$. Unde constat, cùm innotescit vera radix b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mxx - n^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad -bbl \\ -bl \quad +bm^2 \\ +b^3 \end{array}$$

Postreindò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \infty bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mxx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse re-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ -bl \end{array}$$

ferendam.

2 Propositio.

Pro secunda propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx - ddx - f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cxx - ddx - f^3x + bf^3 \infty 0$.

$$-b \quad +bc \quad +bdd$$

M 2

Sup-

Suppositis autem bc majore quàm dd , & bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque secunda propositarum $x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparisonem secundorum terminorum habebimus $l \propto c + b$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $mm \propto bc - dd$, hoc est, substituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto bl - bb - mm$. Tum ex collatione quattorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto bbl - b^3 - bmm - n^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mmx + n^3 \propto 0$ tri-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +b^3 \\ -bl \quad +bmm \\ -bbl \end{array}$$

bus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde de sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & , cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mmx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas investigan-

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ -bl \end{array}$$

das posse adhiberi.

3 Propositio.

Pro tertia propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto 0$, & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 - cx^3 - ddx - f^3x + bf^3 \propto 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad +bdd \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc , & f^3 majore quàm bdd , habebit ipsa eandem formam atque tertia propositio $x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparisonem secundorum terminorum habebimus $c \propto l - b$. Deinde, conferendo tertios terminos, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto bl + mm - bb$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebimus $bdd - f^3 \propto -n^3$, hoc est, restituendo valorem dd inventum, fiet $f^3 \propto n^3 + bbl + bmm - b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æqua-

æqua-

æquationem $x^3 - lxx - b l x - n^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \quad -mm \quad -bbl \\ +bb \quad -bm^2 \\ +b^3 \end{array}$$

Postremò, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto b f^3$, unde sequitur, f^3 æuari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æ-

quationem $x^3 - lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse re-

$$\begin{array}{r} +b \quad -bl \\ +bb \end{array}$$

ferendam.

4 Propositio.

Pro quarta propositione fiat ex duabus $x^3 - cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 - c x^3 - d d x x - f^3 x + b f^3 \propto 0$.

$$\begin{array}{r} -b \quad +bc \quad +bdd \end{array}$$

Suppositis autem dd majore quàm bc , & bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque quarta propositio $x^4 - lxx - mmxx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $c \propto l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebimus $bc - dd \propto mm$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm + bl - bb$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl - b^3 - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$x^3 - lxx - mmx - bmm \propto 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \quad -bl \quad -bbl \\ +bb \quad +b^3 \\ +n^3 \end{array}$$

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto b f^3$, unde sequitur, f^3 æuari $\frac{p^4}{b}$; &, cognitâ verâ radice b , hanc æqua-

tionem $x^3 - lxx - mmx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse refe-

$$\begin{array}{r} +b \quad -bl \\ +bb \end{array}$$

rendam.

5 *Propositio.*

Pro quinta propositione, formemus ex duabus, $x^3 + cxx + ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b$, hanc æquationem $x^4 + cxx + ddx - f^3 x - bx - bc - bdd$
 $+ bf^3 \propto 0$. Suppositis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , habebit ipsa eandem formam atque quinta proposita-
 rum $x^4 + lx^3 + mxx - n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos, habebimus $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bl - bb$. Tum, ex collatione quatorum terminorum, habebimus $n^3 \propto f^3 + ddb$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + mmb - bbl - b^3$. Unde patet, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + mxx - n^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{rcl} +b & -bl & -m^2b \\ & -bb & +bbl \\ & & +b^3 \end{array}$$

Denique, ex comparatione ultimorum terminorum, habebimus $bf^3 \propto p^4$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde constat, cognitâ verâ

radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + mxx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres
 $\begin{array}{rcl} +b & -bl \\ & -bb \end{array}$

reliquas esse referendam.

6 *Propositio.*

Pro sexta propositione fiat ex duabus $x^3 + cxx + ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 - bx^3 - bcxx - bddx + bf^3 \propto 0$
 $+c + dd - f^3$

Suppositis autem c majore quàm b , & bc majore quàm dd , habebit ipsa eandem formam atque sexta propositio $x^4 + lx^3 - mxx - n^3 x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, & per comparationem secundorum terminorum habebimus $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \propto -mm$, hoc est, substituto valore c inven-

invento, erit $dd \propto bl + bb - mm$. Tum, comparando quartos terminos, habebitur $n^3 \propto f^3 + bdd$, hoc est, restituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + bmm - b^3 - bbl$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx - n^3 \propto 0$

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \\ -mm \\ +bbl \\ +b^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, collatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + lxx + blx - \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} +b \\ +bb \\ -mm \end{array}$$

7 Propositio.

Pro septima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx - ddx - f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^3 + cxx - ddx - f^3 x + bf^3 \propto 0$.

$$\begin{array}{r} -b \\ -bc \\ +bdd \end{array}$$

Suppositis autem c majore quàm b , & bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque septima propositio $x^3 + lxx - mmmx + n^3x + p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto b + l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd + bc$, hoc est, restituyendo valorem c inventum, fiet $dd \propto mm - bb - bl$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebimus $n^3 \propto bdd - f^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm - b^3 - bbl - n^3$. Unde sequitur, cognitâ verâ radice b , æquationem hanc $x^3 + bxx - mmm - bmm \propto 0$ reliquis tribus inservire.

$$\begin{array}{r} +l \\ +bb \\ +bl \\ +bbl \\ +n^3 \end{array}$$

Postremò, conferendo ultimos terminos, habebimus $p^4 \propto bf^3$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

tionem $x^3 + bxx - mxx - \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres esse refe-

$$\begin{array}{r} +l \\ +bb \\ +bl \end{array}$$

rendam.

8 Propositio.

Pro octava propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$
& $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 + ddx + f^3x - f^3b \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \\ +bc \\ -bdd \end{array}$$

Supposito autem bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque octava propositio $x^4 - lx^3 + mxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \infty c + b$, hoc est, $c \infty l - b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \infty dd + bc$, hoc est, restituendo valorem c inventum, fiet $dd \infty mm - bl + bb$. Tum ex collatione quatorum terminorum habebitur $f^3 - bdd \infty -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty bmm - bbl - n^3 + b^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$\begin{array}{r} x^3 - lxx + mxx + bmm \infty 0 \text{ tribus reliquis inservire.} \\ +b \quad +bb \quad +b^3 \\ \quad -bl \quad -bbl \\ \quad \quad -n^3 \end{array}$$

Denique, comparatis ultimis terminis, habebimus $p^4 \infty bf^3$, unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - lxx + mxx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ \quad -bl \end{array}$$

9 Propositio.

Pro nona propositione, fiat ex duabus, $x^3 - cxx + ddx + f^3 \infty 0$
& $x - b \infty 0$, hæc æquatio $x^4 - cx^3 + d^3xx + f^3x - f^3b \infty 0$.

$$\begin{array}{r} -b \\ +bc \\ -bdd \end{array}$$

Supposito verò f^3 majore quàm bdd , erit ipsa ejusdem formæ cum propositione nona $x^4 - lx^3 + mxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per con-

consequens habebunt duæ illæ æquationes eandem naturam & constitutionem. Fiat ergo adæquatio, unde comparando secundos terminos habebimus $l \propto b + c$, hoc est, $c \propto l - b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, habebitur $m m \propto d d + b c$, hoc est, subrogato valore c invento, erit $d d \propto m m + b b - b l$. Tum collatis quartis terminis, fiet $n^3 \propto f^3 - b d d$, hoc est, substituto valore $d d$ invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + b m m - b b l$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$x^3 - l x x + m m x + n^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \quad +bmm \\ -bl \quad +b^3 \\ -bbl \end{array}$$

Præterea, comparatis ultimis terminis, habebimus $f^3 b \propto p^4$, unde sequitur, f^3 æuari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 - l x x + m m x + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} +b \quad +bb \\ -bl \end{array}$$

rendam.

10 Propositio.

Pro decima propositione fiat ex duabus hisce $x^3 + c x x + d d x + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + c x^3 + d d x x + f^3 x - f^3 b \propto 0$.

$$-b \quad -bc \quad -bd^2$$

Suppositis autem b majore quàm c , & $b c$ majore quàm $d d$, nec non $b d d$ majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque decima propositio $x^4 - l x^3 - m m x x - n^3 x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, comparatisque secundis terminis habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $d d - b c \propto -m m$, hoc est, substituto valore c invento, erit $d d \propto b b - b l - m m$. Tum ex comparatione quattorum terminorum habebitur $f^3 - b d^3 \propto n^3$, hoc est, restituendo valorem $d d$ inventum, fiet $f^3 \propto b^3 - b b l - b m m - n^3$. Unde constat, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + b x x + b b x + b^3 \propto 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} -l \quad -bl \quad -bbl \\ -m^2 \quad -bmm \\ -n^3 \end{array}$$

N

De-

Denique, comparatis ultimis terminis, habebitur $p^4 \propto b f^4$.
unde constat, f^4 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æqua-
tionem $x^3 + \frac{b}{l} x x + \frac{b}{bl} x + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas esse refe-
rendam.

11 Propositio.

Pro undecima propositione fiat ex duabus $x^3 + c x x - d d x$
 $- f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$ hæc æquatio $x^4 + c x^3 - d d x x + f^3 x - b f^3 \propto 0$.
 $-b -bc +ddb$

Suppositâ autem b majore quàm c , habebit ipsa eandem formam
atque undecima propositio $x^4 - l x^3 - m m x x + n^3 x - p^4 \propto 0$,
ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Factâ
ergo adæquatione, ex comparatione secundorum terminorum
habebimus $c - b \propto -l$, hoc est, $c \propto b - l$. Deinde, comparando
tertios terminos, habebimus $m m \propto d d + b c$, hoc est, restituendo
valorem c inventum, erit $d d \propto m m + b b - b l$. Tum, ex colla-
tione quattorum terminorum, habebitur $n^3 \propto f^3 + d d b$, hoc est,
substituendo valorem $d d$ inventum, fiet $f^3 \propto n^3 - m m b - b^3$
 $+ b b l$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem

$$x^3 + \frac{b}{l} x x - \frac{m m}{b} x + \frac{n^3}{b^3} \propto 0 \text{ reliquis tribus inservire.}$$

$$\begin{array}{r} -l \quad -bb \quad +bbl \\ +bl \quad -mmb \\ -b^3 \end{array}$$

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $b f^3 \propto p^4$.
unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b , hanc æ-
quationem $x^3 + \frac{b}{l} x x - \frac{m m}{b} x + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad reliquas tres esse re-
ferendam.

12 Propositio.

Pro duodecima propositione, fiat ex duabus, $x^3 + c x x + d d x$
 $+ f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + c x^3 + d d x x + f^3 x - f^3 b \propto 0$.
 $-b -bc -bdd$

Suppo-

Suppositis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , nec non ddd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque duodecima propositio $x^4 + lx^3 + mxx - n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens erunt ejusdem naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde conferendo secundos terminos habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, collatis tertiis terminis, habebitur $mm \propto dd - bc$, hoc est, substituendo valorem c inventum, erit $dd \propto mm + bb + bl$. Tum comparando quartos terminos habebimus $f^3 - bdd \propto -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto bmm + bbl + b^3 - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \propto 0$

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \quad +bbl \\ +mm \quad +bm^2 \\ -n^3 \end{array}$$

tribus reliquis inservire.

Denique, comparatis postremis terminis, habebimus $bf^3 \propto p^4$, ac per consequens $f^3 \propto \frac{p^4}{b}$. unde, cognitâ verâ radice b , hæc æquatio $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \propto 0$ ad tres reliquas erit referenda

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ +mm \end{array}$$

13 Propositio.

Pro decima tertia propositione, fiat ex duabus, $x^3 + cxx + ddx + f^3 \propto 0$ & $x - b \propto 0$, hæc æquatio $x^4 + cx^3 + ddx + f^3x - bx - bc - bdd - f^3b \propto 0$. Suppositis autem c majore quàm b , & dd majore quàm bc , nec non f^3 majore quàm bdd , habebit ipsa eandem formam atque decima tertia propositio $x^4 + lx^3 + mxx + n^3x - p^4 \propto 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, collatisque secunis terminis, habebimus $l \propto c - b$, hoc est, $c \propto l + b$. Deinde, comparando tertios terminos, habebimus $mm \propto dd - bc$, hoc est, restituto valore c invento, erit $dd \propto mm - bb - bl$. Tum, comparatis quartis terminis, habebimus $n^3 \propto f^3 - bdd$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \propto n^3 + b^3 + bbl - bmm$. Unde constat, cognitâ verâ

N 2

verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx - bbx + b^3 \infty 0$

$$\begin{array}{r} +l \quad -bl \quad +bbl \\ +m^2 \quad +n^3 \\ -bm^2 \end{array}$$

reliquis tribus inservire.

Postremò, ex collatione ultimorum terminorum, habebimus $b^3 \infty p^4$. unde sequitur, f^3 æquari $\frac{p^4}{b}$; & cognitâ verâ radice b ,

hanc æquationem $x^3 + bxx - bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad reliquas tres

$$\begin{array}{r} +l \quad -bl \\ +mm \end{array}$$

esse referendam.

14 Propositio.

Pro decima quarta propositione formemus ex duabus hisce $x^3 + cxx + ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$ hanc æquationem $x^4 + cx^3 + ddx + f^3x - f^3b \infty 0$. Suppositis autem c majore

$$\begin{array}{r} -b \quad -bc \quad -bdd \end{array}$$

quàm b , & bc majore quàm dd , nec non bdd majore quàm f^3 , habebit ipsa eandem formam atque decima quarta propositio $x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0$, ac per consequens ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio, unde ex collatione secundorum terminorum habebimus $l \infty c - b$, hoc est, $c \infty l + b$. Deinde, comparatis tertiis terminis, habebitur $dd - bc \infty -mm$, hoc est, substituto valore c invento, erit $dd \infty bb + bl - mm$. Tum collatis quartis terminis habebitur $f^3 - bdd \infty -n^3$, hoc est, substituto valore dd invento, erit $f^3 \infty b^3 + bbl - bmm - n^3$. Unde discimus, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + b^3 \infty 0$ tribus reliquis inservire.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \quad +bbl \\ -m^2 \quad -bm^2 \\ -n^3 \end{array}$$

Denique, ex comparatione postremorum terminorum, habebimus $p^4 \infty f^3b$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + bbx + \frac{p^4}{b} \infty 0$ ad tres reliquas esse referendam.

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ -m^2 \end{array}$$

15 Pro-

15 Propositio.

Pro decima quinta & ultima propositione, fiat ex duabus,
 $x^3 + exx - ddx + f^3 \infty 0$ & $x - b \infty 0$, hæc æquatio
 $x^3 + ex^3 - ddx + f^3x - bf^3 \infty 0$. Suppositâ verò e majore
 $-b -bc +bdd$

quàm b , habebit ipsa eandem formam atque decima quinta pro-
 positio $x^3 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^3 \infty 0$, ac per consequens
 ejusdem erunt naturæ & constitutionis. Fiat ergo adæquatio,
 conferendoque secundos terminos habebimus $l \infty -b$, hoc est,
 $e \infty l + b$. Deinde, ex comparatione tertiorum terminorum, ha-
 bebimus $mm \infty dd + bc$, hoc est, substituendo valorem e inven-
 tum, fiet $dd \infty mm - bb - bl$. Tum collatis quartis terminis,
 habebitur $n^3 \infty f^3 + bdd$, hoc est, substituto valore dd invento,
 erit $f^3 \infty b^3 + bbl + n^3 - bmm$. Unde discimus, cognitâ verâ ra-
 dice b , hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x + b^3 \infty 0$ tribus re-

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \quad +bbl \\ -mm \quad +n^3 \\ -bm^3 \end{array}$$

liquis inservire.

Postremò, collatis ultimis terminis, habebimus $p^3 \infty f^3b$, ac
 per consequens $f^3 \infty \frac{p^3}{b}$. unde sequitur, cognitâ verâ radice b ,
 hanc æquationem $x^3 + bxx + b^3x + \frac{p^3}{b} \infty 0$ ad très reliquas

$$\begin{array}{r} +l \quad +bl \\ -mm \end{array}$$

esse referendam.

OBSERVANDA

hic in genere nonnulla.

1. **N**Orandum, nos in omnibus præcedentibus adæquationi-
 bus supponere æquationes comparatas inter se habuisse
 æque multas radices, aut veras, aut falsas, aut imaginarias. Et ad
 dignoscendas imaginarias à reliquis, inserviet Tractatus Diori-
 sticus, quem subungere animus est.

2. Quòd si diligenter perpendantur ea, quæ præcedunt, pa-
 rebit,

N 3

tebit, mutatis signis terminorum locorum parium, ut 2^{di}, 4^{ti}, &c. non mutatis signis reliquorum, (comprehendendo sub terminorum numero etiam locos vacantes:) secundum terminum semper æquari summæ radicum æquationis, affectarum cum suis signis + & —; tertium verò, summæ productorum earundem radicum, cum singulæ binæ in se invicem ducuntur: & quartum, summæ productorum multiplicationis, factæ ex singulis ternis, atque sic deinceps.

Unde sequitur, deficiente secundo termino, ipsam falsam summamvè falsarum radicum æquari ipsi veræ vel verarum summæ; & deficiente tertio termino, productum vel summam productorum ex binis, per signum + vel — designatorum, æquari summæ productorum vel ei, quod ex reliquis binis producitur ac cum contrario signo afficitur, & sic de cæteris.

Primum Exemplum. Fiat ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x + c \infty 0$ hæc æquatio $xx - bx - bc \infty 0$. Quare mutatis signis

secundi termini ac retento signo tertii, habebimus $xx + bx - bc \infty 0$. Unde apparet, $b - c$ esse summam radicis veræ + b & falsæ — c ; & — bc esse productum ex multiplicatione falsæ — c per veram + b .

Secundum Exemplum. Fiat deinde alia æquatio $xx - bx + bc \infty 0$, ex multiplicatione $x - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$. Quare mutatis signis secundi termini, retento signo tertii, habebitur $xx + bx + bc \infty 0$.

Unde apparet, + $b + c$ esse summam duarum verarum radicum, & + bc esse productum ex earum multiplicatione.

Tertium Exemplum. Fiat ex continua multiplicatione trium radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, & $x + f \infty 0$ æquatio sequens: $x^3 - bxx + bcx + bcf \infty 0$. Quare mutatis signis terminorum

loco pari positorum, relinquendo signa reliquorum, habebimus $x^3 + bxx + bcx - bcf \infty 0$. Unde apparet, secundum terminum

num

num $+b+c-f$ esse summam verarum radicum $+b, +c$, & falsæ $-f$; & tertium terminum $bc-bf-cf$ esse summam trium productorum $+bc, -bf$, & $-cf$, prout singulæ binæ radices in se invicem ducuntur; at quartum terminum $-bcf$ esse productum multiplicationis trium radicum $+b, +c$, & $-f$. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam f æquari summam duarum verarum $+b$ & $+c$; & deficiente tertio termino, producta multiplicationis $-bf$ & $-cf$, signo $-$ affecta, æquari producto $+bc$, signo $+$ affecto.

Quartum Exemplum. Formemus æquationem ex continua multiplicatione trium $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, & $x-d\infty 0$, quæ sit $x^3-bxx+bcx-bcd\infty 0$. Et mutatis signis locorum parium,

$$\begin{array}{r} -c \quad +db \\ -d \quad +dc \end{array}$$

retentis signis reliquorum, habebimus $x^3+bx^2+dcx+bcd$.

$$\begin{array}{r} +c \quad +bd \\ +d \quad +bc \end{array}$$

Unde perspicimus, secundum terminum $+b+c+d$ esse summam radicum $+b, +c$, & $+d$; & tertium terminum $+dc+db+bc$ esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum $+bdc$ esse productum multiplicationis omnium trium radicum.

Quantum Exemplum. Fiat ex multiplicatione quatuor $x-b\infty 0$, $x-c\infty 0$, $x-d\infty 0$, & $x+f\infty 0$ sequens æquatio $x^4-bx^3+bcxx-bcdx-bcdf\infty 0$. Unde mutatis signis

$$\begin{array}{r} -c \quad +bd \quad +bcf \\ -d \quad +cd \quad +bdf \\ +f \quad -bf \quad +cdf \\ -cf \\ -df \end{array}$$

terminorum, locis paribus constitutorum, retentis signis reliquorum, habebimus $x^4+bx^3+bcxx+bcdx-bcdf\infty 0$.

$$\begin{array}{r} +c \quad +bd \quad -bcf \\ +d \quad +cd \quad -bdf \\ -f \quad -bf \quad -cdf \\ -cf \\ -df \end{array}$$

Atque apparet, $+b+c+d-f$ esse summam quatuor radicum æqua-

æquationis; & tertium terminum esse summam productorum ex singulis binis radicibus in se invicem ductis; at quartum terminum esse summam productorum ex singulis ternis radicibus; ac denique ultimum terminum esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $-f$, in se invicem ductarum. Patet quoque, deficiente secundo termino, falsam radicem $-f$ æquari summæ trium verarum $+b$, $+c$, & $+d$. Et, deficiente tertio termino, summam productorum ex binis, per $-$ designatorum, æquari reliquæ summæ productorum ex binis, cum signo $+$ affectorum. Non secus se res habet cum defecerit quartus.

Sextum & ultimum exemplum. Fingamus quoque ex multiplicatione continua quatuor radicum $x - b \infty 0$, $x - c \infty 0$, $x - d \infty 0$, & $x - f \infty 0$ hanc exurgere æquationem

$x^4 - bx^3 + bcxx - bcdx + bcdf \infty 0$. Et mutatis signis lo-

$$\begin{array}{rcl} -c & +bd & -bcf \\ -d & +cd & -bdf \\ -f & +bf & -cdf \\ & +cf & \\ & +df & \end{array}$$

corum imparium, retentis reliquis, habebimus

$x^4 + bx^3 + bcxx + bcdx - bcdf$. Atque apparet, secun-

$$\begin{array}{rcl} +c & +bd & +bcf \\ +d & +bf & +bdf \\ +f & +cd & +cdf \\ & +cf & \\ & +df & \end{array}$$

dum terminum $+b + c + d + f$ esse summam quatuor radicum; tertium terminum $+bc + bd + cd + bf + cf + df$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis binis; quartum $+bcd + bcf + bdf + cdf$ esse summam productorum multiplicationis ex singulis ternis; ac denique $+bcd$ esse productum earundem quatuor radicum $+b$, $+c$, $+d$, & $+f$, in se invicem ductarum.

CAPUT XII.

Regula pro inveniendis reliquis Aequationis radicibus, unâ falsarum datâ.

Oportet mutare signa terminorum locorum parium æquationis propositæ, ita ut falsæ radices evadant veræ, & veræ falsæ. Transformatâ hoc pacto æquatione, suppositâque radice datâ pro vera, inveniatur æquatio, reliquis radicibus inveniendis inserviens, sicuti supra docuimus. Atque in æquatione sic inventa mutantur signa terminorum locorum parium, habebimusque æquationem requisito satisfaciensem.

Exempli gratiâ. Esto æquationis $x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0$ una ex falsis radicibus data, quæ sit b , atque mutatis signis terminorum locorum parium, habebimus $x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0$. Supponatur jam radix falsa b hujus æquationis esse vera, atque ut habeatur æquatio, reliquis duabus radicibus inserviens, consulatur Capituli V. Prop^o 2^{da}; & elicientur inde hæc duæ æquationes

$$\begin{array}{r} xx + lx + bb \infty 0 \quad \& \quad xx + bx + \frac{n^3}{b} \infty 0. \\ +b \quad +bl \quad \quad \quad +l \\ -mm \end{array}$$

Quocirca mutatis utriusque æquationis signis locorum parium, habebimus $xx - lx + bb \infty 0 \quad \& \quad xx - bx + \frac{n^3}{b} \infty 0$,

$$\begin{array}{r} -b \quad +bl \quad \quad \quad -l \\ -mm \end{array}$$

 quarum quælibet quæsito satisfaciet.

CAPUT XIII.

*Ad tollendum secundum terminum Aequationum
QUADRATARUM.*

$$xx + lx - mm \infty 0. \text{ Sit } z = \frac{1}{2}l \infty x, \& \text{ habebimus } zz * - \frac{1}{4}ll \infty 0.$$

$$xx - lx - mm \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}l + z \infty x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} zz * - \frac{1}{4}ll \infty 0 \\ -mm \\ yy * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ -mm \end{array} \right.$$

O

xx -

$$xx - lx + mm \infty 0. \text{ Sit } \begin{cases} \frac{1}{2}l + z \infty x, \\ \frac{1}{2}l - y \infty x, \end{cases} \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ + mm \\ y^3 * - \frac{1}{4}ll \infty 0. \\ + mm \end{cases}$$

C U B I C A R U M.

$$x^3 - lxx + mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } \begin{cases} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{cases} \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - n^3 \\ - \frac{1}{3}lm^2 \end{cases}$$

$$x^3 - lxx - mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } \begin{cases} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{cases} \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{3}lm^2 \\ + n^3 \end{cases}$$

$$x^3 - lxx + mmx + n^3 \infty 0. \text{ Sit } \begin{cases} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{cases} \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + mm + \frac{1}{3}lm^2 \\ + n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \end{cases}$$

$$x^3 - lxx - mmx + n^3 \infty 0. \text{ Sit } \begin{cases} \frac{1}{3}l + z \infty x, \\ \frac{1}{3}l - y \infty x, \end{cases} \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{3}llz - \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ + n^3 \\ y^3 * - \frac{1}{3}lly + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \end{cases}$$

$$x^3 + lxx - mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } z = \frac{1}{3}l \infty x, \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \end{cases}$$

$$x^3 + lxx + mmx - n^3 \infty 0. \text{ Sit } z = \frac{1}{3}l \infty x, \text{ erit } \begin{cases} z^3 * - \frac{1}{3}llz + \frac{2}{27}l^3 \infty 0. \\ + m^2 - \frac{1}{3}lm^2 \\ - n^3 \end{cases}$$

 $x^3 +$

$$x^4 + lx^3 - mmx^2 + n^3 \infty 0. \text{ Sit } z = \frac{1}{2} l \infty x, \text{ eritque } z^4 * - \frac{1}{2} llz + \frac{1}{2} l^3 \infty 0. \\ - m^2 + \frac{1}{2} lm^2 \\ + n^3$$

QUADRATO-QUADRATARUM.

$$x^4 - lx^3 + mmx^2 - n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} l + z \infty x, \\ \frac{1}{2} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{1}{2} llz - \frac{1}{2} l^3 z - \frac{1}{2} l^4 \\ + m^2 + \frac{1}{2} lm^2 + \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ - n^3 - \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \\ y^4 * - \frac{1}{2} lly + \frac{1}{2} l^3 y - \frac{1}{2} l^4 \\ + m^2 - \frac{1}{2} lm^2 + \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmx^2 + n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} l + z \infty x, \\ \frac{1}{2} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{1}{2} llz - \frac{1}{2} l^3 z - \frac{1}{2} l^4 \\ - m^2 - \frac{1}{2} lm^2 - \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ + n^3 + \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \\ y^4 * - \frac{1}{2} lly + \frac{1}{2} l^3 y - \frac{1}{2} l^4 \\ - m^2 + \frac{1}{2} lm^2 - \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ - n^3 + \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 + mmx^2 + n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Sit } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} l + z \infty x, \\ \frac{1}{2} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{1}{2} llz - \frac{1}{2} l^3 z - \frac{1}{2} l^4 \\ + m^2 + \frac{1}{2} lm^2 + \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ + n^3 + \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \\ y^4 * - \frac{1}{2} lly + \frac{1}{2} l^3 y - \frac{1}{2} l^4 \\ + m^2 - \frac{1}{2} lm^2 + \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ - n^3 + \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmx^2 - n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} l + z \infty x, \\ \frac{1}{2} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ eritque } \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{1}{2} llz - \frac{1}{2} l^3 z - \frac{1}{2} l^4 \\ - m^2 - \frac{1}{2} lm^2 - \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ - n^3 - \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \\ y^4 * - \frac{1}{2} lly + \frac{1}{2} l^3 y - \frac{1}{2} l^4 \\ - m^2 + \frac{1}{2} lm^2 - \frac{1}{2} lm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{2} ln^3 \\ + p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4} l \infty x, \text{ erit-}$$

$$\text{que } z^4 * - \frac{3}{8} l l z z + \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4 \infty 0.$$

$$+ m^2 \quad - \frac{1}{2} l m^2 \quad + \frac{1}{16} l l m^2$$

$$- n^3 \quad + \frac{1}{4} l n^3$$

$$+ p^4$$

$$x^4 + lx^3 - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4} l \infty x, \text{ erit-}$$

$$\text{que } z^4 * - \frac{3}{8} l l z z + \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4$$

$$- m m \quad + \frac{1}{2} l m^2 \quad - \frac{1}{16} l l m m \infty 0.$$

$$+ n^3 \quad - \frac{1}{4} l n^3$$

$$+ p^4$$

$$x^4 + lx^3 - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0. \text{ Esto } z - \frac{1}{4} l \infty x, \text{ erit-}$$

$$\text{que } z^4 * - \frac{3}{8} l l z z + \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4$$

$$- m m \quad + \frac{1}{2} l m^2 \quad - \frac{1}{16} l l m m \infty 0.$$

$$- n^3 \quad + \frac{1}{4} l n^3$$

$$+ p^4$$

$$x^4 - lx^3 + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \infty x, \\ \frac{1}{4} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ erit que } \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{3}{8} l l z z - \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4 \\ + m^2 \quad + \frac{1}{2} l m^2 \quad + \frac{1}{16} l l m^2 \infty 0. \\ - n^3 \quad - \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \\ y^4 * - \frac{3}{8} l l y y + \frac{1}{8} l^3 y - \frac{3}{256} l^4 \\ + m^2 \quad - \frac{1}{2} l m^2 \quad + \frac{1}{16} l l m^2 \infty 0. \\ + n^3 \quad - \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} l + z \infty x, \\ \frac{1}{4} l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{ erit que } \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{3}{8} l l z z - \frac{1}{8} l^3 z - \frac{3}{256} l^4 \\ - m^2 \quad - \frac{1}{2} l m^2 \quad - \frac{1}{16} l l m^2 \infty 0. \\ + n^3 \quad + \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \\ y^4 * - \frac{3}{8} l l y y + \frac{1}{8} l^3 y - \frac{3}{256} l^4 \\ - m^2 \quad + \frac{1}{2} l m^2 \quad - \frac{1}{16} l l m^2 \infty 0. \\ - n^3 \quad + \frac{1}{4} l n^3 \\ - p^4 \end{array} \right.$$

x⁴ —

$$x^4 - lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{critique} \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{1}{8}llzz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{1}{276}l^4 \\ + m^3 + \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4 \\ y^4 * - \frac{1}{8}llyy + \frac{1}{8}l^3y - \frac{1}{276}l^4 \\ + m^3 - \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ - n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4}l + z \infty x, \\ \frac{1}{4}l - y \infty x, \end{array} \right\} \text{critique} \left\{ \begin{array}{l} z^4 * - \frac{1}{8}llzz - \frac{1}{8}l^3z - \frac{1}{276}l^4 \\ - m^3 - \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ - n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4 \\ y^4 * - \frac{1}{8}llyy + \frac{1}{8}l^3y - \frac{1}{276}l^4 \\ - m^3 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4 \end{array} \right.$$

$$x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = \frac{1}{4}l \infty x, \text{ crit-} \\ \text{que } z^4 * - \frac{1}{8}llzz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{1}{276}l^4 \\ + m^3 - \frac{1}{2}lm^2 + \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ - n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4$$

$$x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = -\frac{1}{4}l \infty x, \text{ crit-} \\ \text{que } z^4 * - \frac{1}{8}llzz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{1}{276}l^4 \\ - m^3 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4$$

$$x^4 + lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = -\frac{1}{4}l \infty x, \text{ crit-} \\ \text{que } z^4 * - \frac{1}{8}llzz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{1}{276}l^4 \\ - m^3 + \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ - n^3 + \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4$$

$$x^4 + lx^3 + mmxx + n^3x - p^4 \infty 0. \text{ Esto } z = \frac{1}{4}l \infty x, \text{ crit-} \\ \text{que } z^4 * - \frac{1}{8}llzz + \frac{1}{8}l^3z - \frac{1}{276}l^4 \\ + m^3 - \frac{1}{2}lm^2 - \frac{1}{16}llm^2 \infty 0. \\ + n^3 - \frac{1}{4}ln^3 \\ - p^4 \\ \text{O } 3$$

Unde

Unde colligere licet, omnes suppositiones, quæ ad tollendum secundum terminum adhibentur, necessariò exhibere æquationem realem, modò reales radices adfuerint in æquatione proposita; & si nullæ in his fuerint, id indicio esse, nullas quoque esse imaginarias in æquatione proposita. Nam, exempli gratiâ, si sit æquatio $x^4 - lx^3 - mxx + n^3x + p^4 \infty 0$: patet, si radix est realis, & necessariò debere æqualis esse $\frac{1}{4}l$, vel major, vel minor. Si æqualis fuerit $\frac{1}{4}l$, ultimus terminus æquationis transformatæ deficere debet; si major fuerit quàm $\frac{1}{4}l$, æquatio transformata denominata à radice z erit realis; si denique minor fuerit, transformata æquatio à radice y denominata itidem realis erit.

Quòd si secundus terminus æquationis propositæ afficitur signo $+$, ut, exempli gratiâ, si sit $x^4 + lx^3 - mxx + n^3x - p^4 \infty 0$: patet, si adfuerit radix aliqua realis, suppositionem hanc $z - \frac{1}{4}l \infty x$ semper esse necessariò realem ac denotare aliquam quantitatem; adeoque transformatam æquationem admittere quoque aliquam radicem.

Deinde constat, radices veras æquationum à radice y denominatarum esse falsas æquationum à radice z denominatarum; & contra, radices veras æquationum à radice z denominatarum esse falsas æquationum à radice y denominatarum.

C A P U T XIV.

*Continens modum tollendi penultimum terminum
Æquationum, secundo termino carentium.*

Pro Cubicis. Supponatur ultimus terminus divisus per incognitam quantitatem R^2 esse æqualis radici æquationis propositæ, & sic æquatio transformetur, in qua demum penultimus deficiet terminus.

Pro Quadrato-quadratis. Supponatur ultimus terminus divisus per incognitam quantitatem R^3 esse æqualis radici æquationis propositæ, & tum rursus transformatâ æquatione penultimus terminus deficiet.

Pro æquationibus quinque dimensionum supponatur ultimus terminus divisus per incognitam quantitatem R^4 esse æqualis radici æquationis propositæ, & sic in infinitum, transmutatis deinde æquationibus, uti dictum est.

Sed

Sed pro æquationibus quatuor dimensionum commodius est, supponere quadratum ultimi termini divisum per incognitam quantitatem R esse æquale radici incognitæ, atque ita transformare æquationem.

Exemplum Cubicarum. Proponatur $x^3 + m m x - n^3 \propto 0$. Esto $\frac{n^3}{R^3} \propto x$, &c, transformatâ æquatione, habebitur $\frac{n^3}{R^6} + \frac{m m n^3}{R^3} - n^3 \propto 0$. Hinc multiplicatis omnibus per R^6 , fiet $n^3 + m m n^3 R^3 - n^3 R^6 \propto 0$, adeoque divisus per n^3 , fiet $n^6 + m m R^3 - R^6 \propto 0$, hoc est, per transpositionem, habebitur $R^6 - m m R^3 - n^6 \propto 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cum datur R^3 ex suppositione habetur $x \propto \frac{n^3}{R^3}$.

Aliud Exemplum. Proponatur $x^3 - m m x - n^3 \propto 0$. Esto $\frac{n^3}{R^3} \propto x$, fietque $\frac{n^3}{R^6} - \frac{m m n^3}{R^3} - n^3 \propto 0$, hoc est, $R^6 + m m R^3 - n^6 \propto 0$. æquatio cubica, in qua penultimus terminus deficit, & in qua cum datur R^3 , ex supra posita suppositione habetur x .

Tertium Exemplum. Proponatur $x^3 - m m x + n^3 \propto 0$. Esto $\frac{n^3}{R^3} \propto x$, eritque, transformatâ æquatione, $\frac{n^3}{R^6} - \frac{m m n^3}{R^3} + n^3 \propto 0$, hoc est, $R^6 - m m R^3 + n^6 \propto 0$. æquatio cubica, carens penultimo termino, & in qua cum datur R^3 ex suppositione id habetur quod requiritur.

Exemplum Quadrato-quadratarum. Proponatur $x^4 - m m x x + n^3 x - p^4 \propto 0$. Esto $\frac{p^4}{R^4} \propto x$, &c, transformatâ æquatione, fiet $\frac{p^4}{R^8} - \frac{m m p^4}{R^4} + \frac{n^3 p^4}{R^4} - p^4 \propto 0$. Hoc est, multiplicatis omnibus per R^4 , habebimus $p^4 - m m p^4 R^4 + n^3 p^4 R^4 - p^4 R^4 \propto 0$, ac proinde divisus per p^4 , habebitur $R^4 - \frac{n^3}{p^4} R^4 + m m R^4 - p^4 \propto 0$. æquatio quatuor dimensionum, carens penultimo termino.

Exemplum secundum. Proponatur $x^4 + m m x x - n^3 x + p^4 \propto 0$. Supponendo $\frac{p^4}{R^4} \propto x$, transformetur æquatio, fietque $R^4 - \frac{n^3}{p^4} R^4 + m m R^4 - p^4 \propto 0$. æquatio in qua penultimus terminus deficit.

Exem-

Exemplum tertium. Proponatur $x^4 * - m m x x - n^3 x + p^4 \infty 0$.
Suppositâ $x \infty \frac{p p}{R}$, æquatio transformata erit $R^4 - \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * + p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum quartum. Proponatur $x^4 * - m m x x + n^3 x + p^4 \infty 0$.
Supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, erit transformata æquatio $R^4 + \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * + p^4 \infty 0$, penultimo termino destituta.

Exemplum quintum. Proponatur $x^4 * + m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0$.
Et supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, æquatio transformata erit $R^4 + \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Exemplum sextum. Proponatur $x^4 * - m m x x - n^3 x - p^4 \infty 0$.
Et supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, erit æquatio transformata $R^4 + \frac{n^3}{p p} R^3 + m m R^2 * - p^4 \infty 0$, quæ destituitur penultimo termino.

Exemplum septimum. Proponatur $x^4 * + m m x x + n^3 x - p^4 \infty 0$.
Supposito $\frac{p p}{R} \infty x$, transformata æquatio erit $R^4 - \frac{n^3}{p p} R^3 - m m R^2 * - p^4 \infty 0$, carens penultimo termino.

Ex quibus manifestum est, ex omnibus æquationibus auferri posse penultimum terminum, quandoquidem superius ostensum est, ex omni æquatione tolli posse secundum, ac modò jam est demonstratum, quo pacto ex æquationibus, secundo termino carentibus, penultimus terminus auferatur. Id quod annotasse operæ pretium duximus, cum Vieta, postquam Capite 1^{mo} de *Æquationum Emendatione* secundum terminum cujusque æquationis tollere docuit, versùs finem ejusdem Capituli affirmet, posse etiam aliquando alios auferri æquationis terminos, atque ex hac nostra quidem methodo constet, quomodo semper penultimus tolli queat.

CAPUT XV.

Methodus transmutandi Aequationes Cubicas compositas, in quibus secundus terminus deest, in Aequationes Cubicas simplices, quando id fieri potest.

PROponatur hæc æquatio $x^3 + 3mmx - n^3 = 0$. Supponamus $zz - zx - mm = 0$, hoc est, $x = \frac{zz - mm}{z}$. Unde,

transformatâ æquatione, habebitur

$$\frac{z^6 - 3mmz^4 + 3m^2zz - m^6}{z^3} + \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 = 0,$$

hoc est, multiplicatis omnibus per z^3 , invenietur hæc æquatio $z^6 - n^3z^3 - m^6 = 0$, vel $z^6 = n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = \sqrt[3]{n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}}$. Quæ est æquatio cubica simplex.

Cognitâ autem ejus radice z , erit ex supra positis radix altera $x = \frac{zz - mm}{z}$. Quæ semper est possibilis, cum z major sit quàm m .

Aliter. Supponatur $zz + zx - mm = 0$, eritque $x = \frac{mm - zz}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $z^6 + n^3z^3 - m^6 = 0$, hoc est, $z^6 = -n^3z^3 + m^6$, cujus radix est $z^3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{4}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}}$. Quæ rursus æquatio est cubica simplex. Cujus ope, cum cognoscitur z , habebitur $x = \frac{mm - zz}{z}$, quæ semper erit possibilis.

Proponatur item hæc æquatio $x^3 - mmx - n^3 = 0$, supponaturque $zz - zx + mm = 0$, hoc est, $x = \frac{zz + mm}{z}$. Unde transformatâ æquatione habebimus $\frac{z^6 + 3mmz^4 + 3m^2zz + m^6}{z^3} - \frac{3mmzz - 3m^4}{z} - n^3 = 0$, hoc est, $z^6 - n^3z^3 + m^6 = 0$, seu $z^6 = n^3z^3 - m^6$, cujus radix est $z^3 = \sqrt[3]{n^3 - \sqrt{\frac{1}{4}n^6 - m^6}}$. Unde

p

Unde patet, oportere m^6 non majus esse quàm $\frac{1}{4}n^6$, ut æquatio hæc $z^6 \propto n^3 z^3 - m^6$ locum obtineat. Nam si majus sit, non posset proposita æquatio $x^3 * - m m x - n^3 \propto 0$ sic in simplicem cubicam transmutari.

CAPUT XVI.

Methodus generalis, concernens usum secundarum radicum, ad tollenda signa radicalia ex Æquatione proposita.

SI fuerint duæ æquationes, in quibus eadem litera reperitur, licet ipsas reducere comparando cum duabus aliis, in quibus hæc litera pauciores habet dimensiones.

Exempli gratiâ, habeamus hæc duas æquationes $x^3 + b x x - c c x - d^3 \propto 0$ & $x^3 - l x x + m m x - n^3 \propto 0$. Quibus transpositis, habebimus $x^3 \propto -b x x + c c x + d^3$ & $x^3 \propto +l x x - m m x + n^3$, ac per consequens $\frac{l x x - m m x + n^3}{b - c c - d^3} \propto 0$, hoc

est, $x x \propto \frac{m m x + c c x + d^3 - n^3}{l + b}$. in quâ litera x pauciorum est

dimensionum. Atque ut habeatur adhuc alia, multiplicetur tantum æquatio inventa per x , & invenietur $x^3 \propto \frac{m m x x + d^3 x}{l + b}$.

Quæ comparata cum aliqua ex præcedentibus, verbi gratiâ, cum secunda, exhibet sequentem æquationem $+m^2 x x - n^3 x - l n^3 \propto 0$.

$$\begin{array}{rcl} + c c & + l m^2 & - b n^3 \\ - l l & + b m^2 & \\ - l b & + d^3 & \end{array}$$

in quâ litera x similiter duarum tantum est dimensionum. Sed si collata fuisset cum prima æquatione, inventa fuisset alia, ubi x adhuc pauciores habuisset dimensiones, ita ut eligenda sit ad comparisonem facillima. Atque sic continuando inveniri hæc possunt duæ aliæ, ubi x est unius dimensionis, & tandem alia ubi prorsus deest. Quod ipsum docet, dari tales æquationes, in quibus litera, quæ in utraque inveniri debet, mutuâ illâ comparatione planè aufertur. Unde apparet, posse quidem aliquando auferrî hanc literam, quamvis non diminuatur numerus dimensionum.

Excim-

Exempli gratiâ, si dentur hæ æquationes $xx - bx - cc = 0$
 & $xx - bx + dd - bb = 0$, habebimus $xx - bx = cc$, &
 $xx - bx = -bb + dd$, ergo $cc = bb - dd$.

Venio jam ad asymmetrias seu irrationales quantitates, pro
 quibus tollendis, oportet tantum supponere literas æquales sin-
 gulis terminis asymmetris æquationis propositæ. Quâ quidem ra-
 tione non tantum obtinebimus æquationem propositam, in qua
 omnes hæ literæ sunt substitutæ; sed etiam tot alias, quot literæ
 fuerunt suppositæ. Unde collatis ordine omnibus hisce æquatio-
 nibus, devenietur ad æquationem, ubi nulla literarum invenitur
 ac per consequens nullum signum radicale.

Exempli gratiâ, proponatur æquatio $c + \sqrt{C.bbx} - \sqrt{dx} = 0$.
 Ad tollendas igitur ejus asymmetrias, ponamus $R = \sqrt{C.bbx}$,
 & $z = \sqrt{dx}$. Quibus in æquatione proposita substitutis, habe-
 bimus $c + R - z = 0$; atque ex reliquis suppositionibus erit
 $R^2 = bbx$, & $z^2 = dx$. Primum, ad tollendum R , habebimus
 $R = z - c$, ideoque $R^2 = z^2 - 2cz + c^2$. Atqui est
 quoque $R^2 = bbx$. Quare erit $z^2 - 2cz + c^2 = bbx$.
 $bbx = 0$, & per consequens $z^2 = 2cz - c^2 + bbx$. Sed si multiplicetur superius proposita æquatio $z - c + \sqrt{bbx} = 0$ per z , habebitur etiam $z^3 = 2cz^2 - c^2z + bbxz$. Ergo erit
 $3cz^2 - 3cz + c^3 = 0$, & substituto dx loco z^2 , habebi-
 mus $3cdx - 3cz + c^3 = 0$, hoc est, $3cdx = 3cz - c^3$,
 seu $z = \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quæ si multiplicetur per z , fiet
 $z^2 = \frac{3cdxz + bbxz + c^3z}{3cc + dx}$. Sed est quoque $z^2 = dx$. Igi-
 tur habebimus $3cdxz + bbxz + c^3z = 3cdx + ddx$,
 hoc est, $\frac{3cdx + ddx}{3cdx + bbx + c^3} = z$. Inventa autem est
 $z = \frac{3cdx + bbx + c^3}{3cc + dx}$. Quare habebimus tandem

116 DE NATURA ÆQUATIONUM.

$$d^3x^3 - 3ccddxx + 3c^4dx - c^6 \propto 0. \text{ In qua } \text{æquatione nul-}$$

$$- 6bbcd \quad - 2c^3bb$$

$$- b^4$$

lus terminus irrationalis reperitur. Quòd si autem alii adhuc reperirentur, oporteret tantum operando ut supra auferre cæteras literas, cæteris terminis irrationalibus æquales suppositas. Quâ quidem ratione omnes omnino termini irrationales tollentur, calculus verò prolixior evadet.

Necessitas hujus methodi vel hinc patet, quòd, si fuerint plures quatuor terminis irrationalibus, signa radicalia, per methodum à Vieta traditam, Capite quinto de Emendatione Æquationum, tolli non possint.

F I N I S.



Ad

Ad Tractatum de Limitibus Aëuationum
EPISTOLA PRÆLIMINARIS.

Clarissimo Viro

FRANCISCO à SCHOOTEN,
Mathematicum in Illustri Leidenſi Academia
Profefſori,

ERASMIUS BARTHOLINUS
S. P.

Nisi meminiffem, quanto majore animo hone-
ſtatis fructus in conſcientia, quàm in ſa-
ma reponatur; nequaquam opportunum
fuiſſet, in edendis hiſce opusculis Analy-
ticis conſilium. Verùm quia communibus magis com-
modis quàm privata jactantia ſtudui, eò animus au-
ſus eſt, deliberato conſilio obſequi. Cujus mea con-
ſcientia interpretem, non alium magis deſidero, quàm
te, Vir Clariffime, quem utilitatibus aliorum, plus
quàm propriæ laudi, indies deſervire, compertum ha-
beo. Venit in mentem ſtudioſum illud otium, quod
Leidæ mihi ſemper emolumento, utriſque deinde ſo-
lacio erat, cujuſq; varietates ſi oratione repetere vel-
lem, prout animo pleraque obverſantur, non dubito
quid exiſtimationi hominum diligentia & fides noſtra,
& in pleriſque etiam pietas ſubjiceretur. Et licet ne-
ſciam, an ullum tempus jucundiùs exegerim; tamen

câ de causâ magnifacio, quòd amicitia tua, usque ad
intimam familiaritatem, capacem me redderet. Ne-
que aliam interpretationem habuit, quòd Leidâ dis-
cessurus, Isagogen Cartesianam typis excudendam con-
cinnaveram, ut meam famam cum tua extenderem.
Quâ de causâ, cum non modò offensas, verùm etiam
simultates varias subierim; non ignoro, quæ futu-
ra sit de hisce jam edendis sententia. Ne dubites ta-
men quin omnia æquo animo toleraverim, præsertim
quia pietas & obsequium causam junxere. Quem
enim præterit, fatum literatorum? Mihi certè non
improvisa est calumniandi vanitas. Est ita naturâ
comprobatum, ut benefactis major ex conscientia mer-
ces, quàm in ore hominum reponatur: nam plerique,
tantum suæ detractum iri gloriæ existimant, quan-
tum cesserit alienæ: postremò, ignavissimus quisque
aliorum scripta carpere non veretur. Sic contendere
pro moribus temporum eruditio est. Quod recordan-
tem, posteritatis magna miseratio subit. Quot enim
præclara inventa putas obscurari, propter scelus hoc
obtectandi? Plerique se intra perpetuum silentium
tenere amant, potiùs quàm malignitati interpretan-
tium exponi. Ita communem hunc errorem, bonum
publicum magnis detrimentis expiabit. Ego aliorum
exemplo, quidem didici nullam ex meis laboribus spe-
rare laudem; tanta tamen mihi semper fuit reveren-
tia posterum, ut censuram erroris non tam reformi-
dem

dem quàm inhumanitatis. Sed, ut de pictore nisi Artifex judicare, ita nisi Mathematicus non satis potest perspicere Mathematica; tuæ potissimum sententiæ hæc exponuntur. Eximium habent usum ea quæ sequenti tractatu exponentur, ad numerosam Æquationum resolutionem, ut reliquas utilitates pertranscam, quia Tu eas ignorare non potes. Quare Lectores rogo, ut iudicis parcant, donec penitus omnia inspexerint. Et si qui fuerint qui hæc recusaverint, sciant se nec inventis gratiam adimere, nec mihi laudis conscientiam. Te verò, Vir Clarissime, si offenderint, omnibus commendationibus destituta reputabo. Vale.

POSTE-

POSTERIOR TRACTATVS
DE
LIMITIBUS
ÆQUATIONUM,

Seu

Quo pacto ex forma Æquationum affectarum
definiri possint limites, intra quos radices
veræ debent offendi.

DE

D E
L I M I T I B U S
Æ Q U A T I O N U M .

C A P U T I .

*De Æquationum Quadratarum seu duarum
dimensionum limitibus.*

Prop. 1. $xx - lx + mm \propto 0$.



Er transpositionem erit $mm \propto lx - xx$, & si prima pars fuerit realis, erit etiam altera pars realis, ideoque lx majus quàm xx ; & diviso utroque termino per x , erit l major quàm x . Quin & per transpositionem propositæ æquationis habebitur $xx \propto lx - mm$: ideoque altera pars est realis, & lx majus quàm mm . Unde diviso utroque termino per l , erit x major quàm $\frac{mm}{l}$. Quare æquationis propositæ utraque radix x major erit quàm $\frac{mm}{l}$, sed minor quàm l .

Prop. 2. $xx - lx - mm \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $xx \propto lx + mm$, ideoque xx majus erit quàm mm , & x major quàm m , ac proinde mx majus quàm mm . Unde xx minus erit quàm $lx + mx$, adeoque si utraque pars dividatur per x , erit x minor quàm $l + m$. Rursus, quoniam xx æquatur $lx + mm$, erit xx majus quàm lx ; ac proinde si uterque terminus dividatur per x , erit x major quàm l , & lx majus quàm ll . Hinc cum xx æquetur $lx + mm$, erit xx majus quàm $ll + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{ll + mm}$. Postremo, quandoquidem x major est quàm m , erit lx majus quàm lm , & xx majus quàm $lm + mm$, hoc est, x major quàm $\sqrt{lm + mm}$. Unde radix æquationis propositæ erit major quàm maxima harum duarum $\sqrt{ll + mm}$ & $\sqrt{lm + mm}$, sed minor quàm $l + m$.

Q

Prop.

Prop. 3. $xx + lx - mm \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $xx + lx \propto mm$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ majus erit quàm x . Rursus existente $xx + lx \propto mm$, erit mm majus quàm xx , & m major quàm x , ac proinde mx majus quàm xx . Atqui habemus $xx + lx \propto mm$. Ergo $mx + lx$ majus erit quàm mm . Hinc divisâ utrâque parte per $m + l$, fiet x major quàm $\frac{mm}{l+m}$. Quare inventa est x radix æquationis propositæ major quàm $\frac{mm}{l+m}$, at minor quàm $\frac{mm}{l}$ & m .

CAPUT II.

De limitibus Æquationum Cubicarum seu trium dimensionum, secundo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 * - mmx + n^3 \propto 0$.

PER transpositionem habebimus $x^3 \propto mmx - n^3$, eritque mmx majus quàm n^3 . Unde divisio utroque termino per mm , erit x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Deinde per transpositionem erit $mmx - x^3 \propto n^3$, ac per consequens mm majus quàm xx , & m major quàm x . Quare inventa est utraque radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm}$, & minor quàm m .

Prop. 2. $x^3 * - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3$, eritque xx majus quàm mm , & x major quàm m . Erit quoque $x^3 - n^3 \propto mmx$, ideoque x^3 major quàm n^3 , & x major quàm n , ac proinde nnx majus quàm n^3 . Atqui per transpositionem propositionis habemus $mmx + n^3 \propto x^3$. Quare $mmx + nnx$ majus erit quàm x^3 ; & divisâ utrâque parte per x , erit $mm + nn$ majus quàm xx ; ideoque x minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Inventa ergo est x radix æquationis propositæ major quàm m & n , at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$. Atque liquet, ad evitandam extractionem radicis cubicæ ipsius n^3 , quòd loco nn in vinculo assumi possit quantitas aliqua, quæ non sit

fit minor. Id quod non erit difficile, cognitis nempe tribus dimensionibus ipsius n^3 , sumendoque loco nn rectangulum sub duabus quantitibus; quarum alterutra non sit ipsa n minor. Eritque hoc ad sequentia notatu dignum.

Prop. 3. $x^3 + m m x - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 \propto n^3 - m m x$, eritque $\frac{n^3}{m m}$ major quam x . Rursus erit $m m x \propto n^3 - x^3$, & consequenter n^3 major quam x^3 , & n major quam x , ac proinde nnx majus quam x^3 . Sed per transpositionem æquationis propositæ est quoque $x^3 + m m x \propto n^3$. Ergo $nnx + m m x$ majus erit quam n^3 , & divisâ utraq; parte per $nn + m m$, erit x major quam $\frac{n^3}{nn + m m}$. Inventa itaque est radix x æquationis propositæ esse major quam $\frac{n^3}{m m + n n}$, sed minor quam $\frac{n^3}{m m}$ & n . Possumus etiam loco nn accipere rectangulum duarum maximarum dimensionum ipsius n^3 , ut radice cubicæ extractio evitetur.

C A P U T III.

De limitibus Æquationum Cubicarum, penultimo termino carentium.

Prop. 1. $x^3 - l x x + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + n^3 \propto l x x$, ideoque $x x$ majus quam $\frac{n^3}{l}$. Rursus erit $n^3 \propto l x x - x^3$, & consequenter l major quam x . Quælibet igitur radicum x æquationis propositæ major erit quam $\sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$, & minor quam l .

Prop. 2. $x^3 - l x x - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - l x x \propto n^3$, ideoque x major quam l . Rursus erit $x^3 - n^3 \propto l x x$, & consequenter x major quam n , & $x x$ majus quam nn , & $n x x$ majus quam n^3 . Atqui habemus quoque per transpositionem $l x x + n^3 \propto x^3$. Quare erit $l x x + n x x$ majus quam x^3 . Dividatur utraque pars per $x x$, eritque $l + n$ major

Q 2

major quàm x . Inventa itaque est radix x æquationis propositæ major quàm l & n , sed minor quàm $l+n$. Manifestum est quoque ad evitandam extractionem radicis cubicæ ex n^3 , quòd loco n sumi possit minor trium dimensionum ipsius n^3 , quando x major est; & quando minor perhibetur quàm $l+n$, quòd tunc loco n maxima trium dimensionum ipsius n^3 accipi queat, & sic de reliquis, quibus ob nimiam facilitatem non immoramur.

$$\text{Prop. 3. } x^3 + lxx^* - n^3 \propto 0.$$

Per transpositionem erit $x^3 \propto n^3 - lxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx . Est etiam $lxx \propto n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x , & nxx majus quàm x^3 . Sed habetur $x^3 + lxx \propto n^3$. Ergo $nxx + lxx$ majus erit quàm n^3 , hoc est, divisâ utrâque parte per $n+l$, erit xx majus quàm $\frac{n^3}{n+l}$. Inventa est itaque radix x æquationis propositæ major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+n}}$, sed minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$ & n . Demonstratur præterea $nxx + lnx$ majus esse quàm n^3 , & $nx + lx$ majus quàm nn , & consequenter x major quàm $\frac{nn}{l+n}$, quandoquidem n major est quàm x .

CAPUT IV.

De Æquationibus Cubicis, in quibus omnes termini extant.

$$\text{Prop. I. } x^3 - lxx + m mx - n^3 \propto 0.$$

PER transpositionem habebimus $x^3 - lxx \propto n^3 - m mx$. Hinc si x æquetur ipsi l , erit etiam x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ æqualis. Ideoque, si vicissim l æquetur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm \propto n^3$, erit similiter x radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & $\frac{n^3}{mm}$. Præterea si $x^3 - lxx$ est realis, hoc est, x major quàm l , erit quoque $n^3 - m mx$ realis; & consequenter $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x . Quòd si autem eadem quantitas $x^3 - lxx$ nihilo minor sit, transponatur proposita æquatio hac ratione $lxx - x^3 \propto m mx - n^3$. Et quandoquidem supponitur

tur $lxx - x^3$ esse realis, hoc est, l major quam x , erit $mmx - n^3$ etiam realis, & consequenter major erit x quam $\frac{n^3}{mm}$. Inventa est itaque radix æquationis propositæ æqualis ipsi l & ipsi $\frac{n^3}{mm}$, cum duo hi termini æquantur. Et si unam tantum habeat aut tres, quilibet earum erit intra hos limites, quando inæquales sunt; si verò æquales, hoc est, $lmm \propto n^3$, substituto lmm loco n^3 in æquatione proposita, & dividendo per $x - l$, cognoscemus eam non habere aliam radicem in hoc casu quam l .

Prop. 2. $x^3 + lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^3 - mmx \propto n^3 - lxx$. Quòd si ergo xx & mm sunt æqualia, erit etiam x ipsi $\frac{n^3}{l}$ æquale; & si xx majus est quam mm , erit quoque $\frac{n^3}{l}$ majus quam xx ; & si xx minus est quam mm , minus quoque erit $\frac{n^3}{l}$ quam xx . Inveni itaque sunt duo limites m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, quorum cuilibet æquatur radix æquationis propositæ, si fuerint æquales, hoc est, si lmm æquatur ipsi n^3 ; aut necessario inter duos erit, si inæquales fuerint. Eadem est ratio duorum reliquorum limitum n & $\frac{mm}{l}$.

Prop. 3. $x^3 - lxx - mmx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx \propto mmx + n^3$, ideoque x major quam l . Rursus cum per transpositionem sit $x^3 - mmx \propto lxx + n^3$, erit xx majus quam mm , & x major quam m , & mx majus quam mmx . Sed per transpositionem est quoque $x^3 - n^3 \propto lxx + mmx$, & per consequens x major quam n , & nx majus quam n^3 . Quin & per transpositionem propositæ habetur $lxx + mmx + n^3 \propto x^3$, atque inventum est mx majus quam mmx , & xx majus quam n^3 . Ergo erit $lxx + mx + nx$ majus quam x^3 . Quocirca si utraque pars dividatur per xx , erit $l + m + n$ major quam x . Inventa est itaque radix æquationis propositæ major quam l , m , & n , sed minor quam $l + m + n$.

Q 3

Prop.

Prop. 4. $x^3 + lxx + m mx - n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + m mx \propto n^3 - lxx$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx . Sed est quoque $x^3 + lxx \propto n^3 - m mx$, ideoque $\frac{n^3}{mm}$ major quàm x . At verò est etiam $lxx + m mx \propto n^3 - x^3$, & consequenter n major quàm x ; quare & $n nx$ majus erit quàm x^3 , & lnx majus quàm lxx . Atqui est $x^3 + lxx + m mx \propto n^3$. Ergo $n nx + ln x + m mx$ majus erit quàm n^3 , & x major quàm $\frac{n^3}{nn + ln + mm}$. Quare inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{n^3}{mm + ln + mm}$, at minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, $\frac{n^3}{mm}$, & n .

Prop. 5. $x^3 - lxx + m mx + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $m mx + n^3 \propto lxx - x^3$, ideoque l major quàm x . Rursus erit $x^3 + n^3 \propto lxx - m mx$, & per consequens x major quàm $\frac{mm}{l}$. Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, & minorem quàm l . Sed per transpositionem est quoque $x^3 + m mx \propto lxx - n^3$, & consequenter xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Quare & x major erit quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$.

Prop. 6. $x^3 + lxx - m mx + n^3 \propto 0$.

Per transpositionem erit $x^3 + lxx \propto m mx - n^3$, ideoque x major quàm $\frac{n^3}{mm}$. Similiter erit $x^3 + n^3 \propto m mx - lxx$, & per consequens $\frac{mm}{l}$ major quàm x . Rursus erit $lxx + n^3 \propto m mx - x^3$, & consequenter m major quàm x . Invenimus ergo, quamlibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$, sed minorem quàm $\frac{mm}{l}$ & m .

Prop.

Prop. 7. $x^3 - lxx - m mx + n^3 = 0$.

Per transpositionem erit $x^3 - lxx = m mx - n^3$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l , quòd tunc quoque x ipsi $\frac{n^3}{mm}$ est æqualis. Ideoque si l æquatur ipsi $\frac{n^3}{mm}$, hoc est, $lmm = n^3$, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum l & $\frac{n^3}{mm}$; & si inæquales fuerint, neutra ex duabus radicibus æquationis propositæ poterit esse inter hos terminos. Quia videmus, cum x major est quàm l , tum quoque x majorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$; & si minor est quàm l , tum similiter x minorem esse quàm $\frac{n^3}{mm}$. Sed per transpositionem est etiam $x^3 - m mx = lxx - n^3$. Hinc si x æquetur ipsi m , erit quoque $xx = \frac{n^3}{l}$. Ideoque si fuerint hi termini m & $\frac{n^3}{l}$ æquales, hoc est, $lmm = n^3$, una radicum æquationis propositæ major erit unoquoque terminorum æqualium m & $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ erit inter duos ex his terminis. Præterea per transpositionem est quoque $x^3 + n^3 = lxx + m mx$, ideoque $lxx + m mx$ majus quàm x^3 , & $lxx + m mx$ majus quàm xx . At x erit realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m , si æquatio proposita fuerit realis. Et si æqualis fuerit vel major quàm m , erit & $lxx + m mx$ majus quàm xx , ac per consequens $l + m$ major quàm x . Quòd si autem minor fuerit quàm m , multo magis $l + m$ major erit quàm x . Porro ex hac eadem æquatione constat, quòd $lxx + m mx$ etiam majus est quàm n^3 . Hinc cum $l + m$ major sit quàm x , ideoque $lxx + lmx$ majus quàm lxx ; erit quoque $lxx + lmx + m mx$ majus quàm n^3 , & x major quàm $\frac{n^3}{l + l + m}$. Invenimus igitur, quòd quælibet radicum æquationis propositæ major est quàm $\frac{n^3}{l + l + m}$, & multo major quàm $\frac{n^3}{l + 2l + mm}$, at minor quàm $l + m$. Denique, quoniam $l + m$ major est quàm x , si major tunc x quàm m , erit inter hosce terminos $l + m$ & m . Quòd si verò m major est quàm x , invenimus, quòd $lxx + m mx$ est ma-

jus

jus quàm n^3 , hinc $lmx + mmx$ multo magis erit majus quàm n^3 ; adeoque x major quàm $\frac{n^3}{lm + mm}$, & consequenter x major quàm minor horum duorum terminorum m & $\frac{n^3}{lm + mm}$.

CAPUT V.

De Aëuationibus quatuor dimensionum, secundo & tertio termino carentibus.

*Prop. 1. $x^4 * * - n^3 x + p^4 \propto 0$.*

Per transpositionem est $x^4 \propto n^3 x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed per transpositionem est quoque $p^4 \propto n^3 x - x^4$, & consequenter n^3 major quàm x^3 , ac n major quàm x . Ergo utraque radix x æquationis propositæ major erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minor quàm n .

*Prop. 2. $x^4 * * - n^3 x - p^4 \propto 0$.*

Per transpositionem est $x^4 - n^3 x \propto p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3 , & x major quàm n , & $nnxx$ majus quàm $n^3 x$. Sed est quoque $x^4 - p^4 \propto n^3 x$, ideoque x^4 majus quàm p^4 , & x major quàm p , & $ppxx$ majus quàm p^4 . At per transpositionem est etiam $n^3 x + p^4 \propto x^4$. Ergo $nnxx + ppxx$ majus erit quàm x^4 . Hinc divisâ utraq; parte per xx , erit xx minus quàm $nn + pp$, & x minor quàm $\sqrt{nn + pp}$. Invenimus igitur, quòd radix æquationis propositæ est major quàm n & p , sed minor quàm $\sqrt{nn + pp}$, ac proinde multo minor quàm $n + p$.

*Prop. 3. $x^4 * * + n^3 x - p^4 \propto 0$.*

Per transpositionem erit $x^4 \propto p^4 - n^3 x$, ac per consequens $\frac{p^4}{n^3}$ major quàm x . Similiter erit $n^3 x \propto p^4 - x^4$, & consequenter p^4 majus quàm x^4 , & p major quàm x , & $p^3 x$ majus quàm x^4 . Sed est præterea $x^4 + n^3 x \propto p^4$, ideoque $p^3 x + n^3 x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$. Invenimus itaque, quòd radix æquationis propositæ est major quàm $\frac{p^4}{p^3 + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$ & p .

C A-

CAPUT VI.

*De Aequationibus quatuor dimensionum, in quibus tertius
& quartus terminus deficiunt.*

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + p^4 = 0$.

PER transpositionem est $x^4 = lx^3 - p^4$, ideoque x^3 major
quàm $\frac{p^4}{l}$. At verò est etiam $p^4 = lx^3 - x^4$, & consequen-
ter l major quàm x . Invenimus igitur, quòd unaquæque duarum
radicum æquationis propositæ est major quàm $\sqrt[4]{C \cdot \frac{p^4}{l}}$, at minor
quàm l . Hinc quoniam l major est quàm x , & lx^3 majus quàm p^4 ,
habebitur lx^3 majus quàm p^4 , & consequenter x^3 majus quàm
 $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\frac{p^4}{l}$.

Prop. 2. $x^4 - lx^3 - p^4 = 0$.

PER transpositionem est $x^4 = lx^3 + p^4$, ideoque x major quàm l .
Similiter est $x^4 = p^4 - lx^3$, & consequenter x^4 majus quàm p^4 , &
 x major quàm p , ac proinde px^3 majus quàm p^4 . Sed est etiam
 $lx^3 + p^4 = x^4$. Ergo $lx^3 + px^3$ majus erit quàm x^4 , & $l + p$ major
quàm x . Invenimus igitur, quòd radix x æquationis propositæ
major est quàm l & p , at minor quàm $l + p$.

Prop. 3. $x^4 + lx^3 - p^4 = 0$.

PER transpositionem est $x^4 = p^4 - lx^3$, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm
 x^3 . Similiter est $lx^3 = p^4 - x^4$, ac per consequens p major quàm x ,
& px^3 majus quàm x^4 . Atqui est etiam $x^4 + lx^3 = p^4$. Ergo lx^3
 $+ px^3$ majus erit quàm p^4 , & x^3 major quàm $\frac{p^4}{l+p}$. Quare inve-
nimus, quòd radix x æquationis propositæ major est quàm
 $\sqrt[4]{C \cdot \frac{p^4}{l+p}}$, sed minor quàm p & $\sqrt[4]{C \cdot \frac{p^4}{l}}$. Facillimè verò evitan-
tur extractiones radicum cubicarum, sumendo terminos paulò
majores aut minores, prout necessitas requirit. Atque in hoc ca-
su,

R

su,

fu, quoniam x^3 major est quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & p major quàm x , erit $p x x$ majus quàm $\frac{p^4}{l+p}$, & $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{l+p+p}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{l+p+p}}$. Præterea, quandoquidem $\frac{p^4}{l}$ majus est quàm x^3 , erit $\frac{p^4 x}{l}$ majus quàm x^4 , & $l p p x$ majus quàm $l x^3$, quia p major est quàm x . Atqui est $x^4 + l x^3 \propto p^4$. Ergo $\frac{p^4 x}{l} + l p p x$ majus erit quàm p^4 . Hinc, multiplicatâ utrâque parte per l , & divisâ per $p p$, habebitur $p p x + l l x$ majus quàm $l p p$, & x major quàm $\frac{l p p}{l l + p p}$.

De æquationibus quatuor dimensionum, in quibus secundus & quartus terminus deficiunt, nihil addimus: siquidem illæ ad quadratas referuntur, ita ut ipsarum limites eodem modo quo quadratarum inveniri possint.

CAPUT VII.

De Æquationibus quatuor dimensionum, secundo termino carentibus.

Prop. I. $x^4 - m m x x + n^3 x - p^4 \propto 0$.

PER transpositionem erit $x^4 - m m x x \propto p^4 - n^3 x$. Unde apparet, quòd, si fuerit $x x$ æquale ipsi $m m$, hoc est, $x \propto m$, etiam x ipsi $\frac{p^4}{n^3}$ sit æqualis futura. Ideoque si fuerit m æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $m n^3 \propto p^4$, radix x æquationis propositæ æquabitur singulis terminorum m & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam sive tres habuerit, semper erit inter duos hosce terminos. Præterea cognoscitur, si duo hi termini fuerint æquales, hoc est, $m n^3 \propto p^4$, substituto $m n^3$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - m$, fore, ut non possit habere aliam radicem realem præter m .

Prop.

Prop. 2. $x^4 + m m x x - n^3 x - p^4 \propto 0.$

Per transpositionem habebimus $x^4 - n^3 x \propto p^4 - m m x x$. Unde constat, si x æqualis fuerit ipsi n , fore etiam $x x \propto \frac{p^4}{m m}$; hoc est, $x \propto \sqrt{\frac{p^4}{m m}}$ aut $\frac{p^2}{m}$; & si fuerit $n \propto \sqrt{\frac{p^4}{m m}}$ aut $\frac{p^2}{m}$, tunc radicem æquationis fore æqualem cuilibet horum terminorum; & si inæquales fuerint, tunc eam necessariò futuram inter hosce duos. Idem demonstrabitur de duobus reliquis p & $\frac{n^3}{m}$; nempe si fuerint æquales, radix æquationis propositæ æquabitur unicuique illorum duorum; sin inæquales, necessariò constituetur inter duos, transpositâ scilicet æquatione in hunc modum $x^4 - p^4 \propto n^3 x - m m x x$.

Prop. 3. $x^4 - m m x x - n^3 x - p^4 \propto 0.$

Per transpositionem erit $x^4 - m m x x \propto n^3 x + p^4$, ideoque $x x$ majus quàm $m m$, & x major quàm m , & $m x^3$ majus quàm $m m x x$. Sed est etiam $x^4 - n^3 x \propto m m x x + p^4$, ideoque x^3 major quàm n^3 , & x major quàm n , & $n x^3$ majus quàm $n^3 x$. Eodem modo est $x^4 - p^4 \propto m m x x + n^3 x$, & consequenter x^3 majus quàm p^4 , & x major quàm p , & $p x^3$ majus quàm p^4 . Atqui per transpositionem est quoque $m m x x + n^3 x + p^4 \propto x^4$. Quare $m x^3 + n x^3 + p x^3$ majus erit quàm x^4 , & $m + n + p$ major quàm x . Consimili ratione demonstrabitur, quòd $m m x x + n n x x + p p x x$ majus erit quàm x^4 , & consequenter $m m + n n + p p$ majus quàm $x x$. Invenimus ergo, quòd radix x propositæ æquationis major est quàm m , n , & p , at minor quàm $m + n + p$, & $\sqrt{m m + n n + p p}$.

Prop. 4. $x^4 + m m x x + n^3 x - p^4 \propto 0.$

Per transpositionem est $x^4 + m m x x \propto p^4 - n^3 x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Similiter est $x^4 + n^3 x \propto p^4 - m m x x$, ac per con-

R 2

sequens

sequens $\frac{p^4}{mm}$ majus quàm xx , hoc est, $\frac{pp}{m}$ majus quàm x . Atqui est quoque $mxx + n^3x \propto p^+ - x^+$, & consequenter p^+ majus quàm x^+ , ac p major quàm x , & p^3x majus quàm x^4 , nec non $mmpx$ majus quàm mxx . Sed est etiam $x^4 + mxx + n^3x \propto p^+$. Quare $p^3x + mmpx + n^3x$ majus est quàm p^+ , ac per consequens, divisâ utrâque parte per $p^3 + mmp + n^3$, erit radix x propositæ æquationis major quàm $\frac{p^4}{p^3 + mmp + n^3}$; at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\frac{pp}{m}$, & p .

Prop. 5. $x^4 - mxx + n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 \propto mxx - x^4$, ideoque m majus quàm x , & m major quàm x . Similiter est $x^4 + p^4 \propto mxx - n^3x$, & consequenter x major quàm $\frac{n^3}{m}$. Præterea est $x^4 + n^3x \propto mxx - p^4$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{p^4}{m}$, hoc est, x major quàm $\frac{pp}{m}$. Invenimus ergo quamlibet radicem æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{n^3}{m}$ & $\frac{pp}{m}$, at minorem quàm m .

Prop. 6. $x^4 + mxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 + mxx \propto n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Sed est etiam $x^4 + p^4 \propto n^3x - mxx$, ac per consequens $\frac{n^3}{m}$ majus quàm x . Similiter est $x^4 + mxx + p^4 \propto n^3x$, ideoque n^3 major quàm x^3 , & n major quàm x . Invenimus ergo quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\frac{n^3}{m}$ & n .

Prop. 7. $x^4 - mxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - mxx \propto n^3x - p^4$. Unde patet,

tet, si xx æquatur ipsi mm , hoc est, $x \propto m$, eandem x fore æqualem ipsi $\frac{p^2}{n^2}$; ac per consequens, si fuerint termini hi m & $\frac{p^2}{n^2}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis ipsorum; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos m & $\frac{p^2}{n^2}$. Eodem modo per transpositionem est $x^2 - n^2 x \propto mmxx - p^2$. Unde similiter discimus, si x^2 æquatur ipsi n^2 , hoc est, $x \propto n$, fore etiam $xx \propto \frac{p^2}{m}$, hoc est, $x \propto \frac{p}{m}$. Ideoque si hi termini n & $\frac{p}{m}$ fuerint æquales, una ex radicibus æquationis propositæ æquabitur singulis eorundem terminorum; sin verò inæquales fuerint, nulla radicum æquationis propositæ inter illos duos constituta erit. Præterea per transpositionem est $x^2 + p^2 \propto mmxx + n^2 x$, ideoque $mmxx + n^2 x$ majus quàm x^2 , & $mmx + n^2$ majus quàm x^2 . Porro, si proposita æquatio est realis, erit x realis, & æqualis, vel major, vel minor quàm n . Si fuerit æqualis vel major, erit $mmx + nnx$ majus quàm x^2 , & $mm + nn$ majus quàm xx , hoc est, x minor erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Si fuerit x minor quàm n , minor etiam erit quàm $\sqrt{mm + nn}$. Quare patet, quamlibet radicum æquationis propositæ necessario minorem esse quàm $\sqrt{mm + nn}$. Denique existente $x^2 + p^2 \propto mmxx + n^2 x$, erit similiter $mmxx + n^2 x$ majus quàm p^2 . Et quia inventa est $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x , erit consequenter $mmx \sqrt{mm + nn}$ majus quàm $mmxx$, ideoque $mmx \sqrt{mm + nn} + n^2 x$ majus quàm p^2 , & x major quàm $\frac{p^2}{mm \sqrt{mm + nn} + n^2}$. Quare inventus est terminus unus major & alter minor quàm quælibet duarum radicum æquationis propositæ. Atque ita modo sequenti capite observato propositione septimâ demonstrari potest, quod x major est quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^2}{mm + n^2}$.

CAPUT VIII.

De Aequationibus quatuor dimensionum, penultimo termino carentibus.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + m m x x^* - p^4 \propto 0.$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto p^4 - m m x x$. Unde constat, si x est æqualis ipsi l , etiam $x x$ æquari $\frac{p^4}{m m}$, hoc est, $x \propto \frac{p^2}{m}$; ideoque si l æqualis est ipsi $\frac{p^2}{m}$, hoc est, $l m \propto p p$, erit radix æquationis propositæ æqualis singulis terminorum l & $\frac{p^2}{m}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, sive unam, sive tres habuerit, semper erit inter hos terminos; sed si fuerint æquales, hoc est, $l m \propto p p$, & $l l m m \propto p^4$, substituto $l l m m$ loco p^4 in æquatione proposita, eâque divisâ per $x - l$, cognoscemus in hoc casu non haberi aliam radicem veram præter l .

Prop. 2. $x^4 + lx^3 - m m x x^* - p^4 \propto 0.$

Per transpositionem est $x^4 - m m x x \propto p^4 - lx^3$. Unde constat, si fuerit $x \propto m$, etiam $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$ æquari ipsi x ; ideoque si duo termini m & $\sqrt{C. \frac{p^4}{l}}$ sint æquales, erit radix æquationis æqualis singulis horum terminorum; sin verò inæquales fuerint, erit illa necessariò inter duos. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto m m x x - lx^3$. Unde discimus, quòd si x æqualis est ipsi p , fore quoque eam æqualem ipsi $\frac{m m}{l}$; ideoque si termini p & $\frac{m m}{l}$ æquantur, erit radix æquationis æqualis unicuique illorum; sed si inæquales fuerint, erit illa necessariò inter utrosque constituta.

Prop. 3. $x^4 - lx^3 - m m x x^* - p^4 \propto 0.$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto m m x x + p^4$, ideoque x major

major quàm l . Sed & per transpositionem est $x^4 - m m x x \propto l x^3 + p^4$, ideoque x major quàm m , & $m x^3$ majus quàm $m m x x$. Similiter per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto l x^3 + m m x x$, ideoque x major quàm p , & $p x^3$ majus quàm p^4 . Præterea per transpositionem propositionis est $l x^3 + m m x x + p^4 \propto x^4$, ideoque $l x^3 + m x^3 + p x^3$ majus quàm x^4 , & $l + m + p$ majus quàm x . Quare invenimus radicem æquationis propositæ majorem esse quàm l , m , & p , at minorem quàm $l + m + p$. Denique per transpositionem est $x^4 \propto l x^3 + m m x x + p^4$, ideoque x^4 majus quàm $l x^3 + m m x x$, & $x x$ majus quàm $l x + m m$. Atqui demonstratum est superius x majorem esse quàm l , ac proinde $l l$ minus quam $l x$. Multo igitur magis $x x$ majus erit quàm $l l + m m$, & x major quàm $\sqrt{l l + m m}$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt[4]{l^4 + p^4}$, $\sqrt[4]{m^4 + p^4}$, & $\sqrt[4]{m m p p + p^4}$.

Prop. 4. $x^4 + l x^3 + m m x x^* - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 + l x^3 \propto p^4 - m m x x$, ideoque $\frac{p^4}{m m}$ majus quàm $x x$, & $\frac{p p}{m}$ majus quàm x . Similiter est $x^4 + m m x x \propto p^4 - l x^3$, ac per consequens p major quàm x , & $p p x x$ majus quàm x^4 , & $l p p$ majus quàm $l x^3$. Sed per transpositionem propositionis est etiam $x^4 + l x^3 + m m x x \propto p^4$. Quare $p p x x + l p x x + m m x x$ majus erit quàm p^4 , & $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{p p + l p + m m}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{p p + l p + m m}}$. At verò existente $x^4 + l x^3 + m m x x \propto p^4$, erit quoque p^4 majus quàm $l x^3$, ideoque $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3 , & $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l}}$ majus quàm x . Inventa igitur est radix æquationis propositæ major quàm $\sqrt[4]{\frac{p^4}{p p + l p + m m}}$; at minor quàm $\frac{p p}{m}$, $\sqrt[4]{C. \frac{p^4}{l}}$, & p .

Prop. 5. $x^4 - l x^3 + m m x x^* + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $m m x x + p^4 \propto l x^3 - x^4$, ideoque l major

jor quàm x . Deinde est $x^4 + p^4 \propto lx^3 - m m x x$, ac per consequens x major quàm $\frac{m m}{l}$. Præterea est $x^4 + m m x x \propto lx^3 - p^4$, ac proinde x^3 major quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$. Invenimus igitur, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{m m}{l}$ & $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$, at minorem quàm l .

$$\text{Prop. 6. } x^4 + lx^3 - m m x x^* + p^4 \propto 0.$$

Per transpositionem est $x^4 + p^4 \propto m m x x - lx^3$, ideoque $\frac{m m}{l}$ majus quàm x . Deinde est $lx^3 + p^4 \propto m m x x - x^4$, ac proinde m major quàm x . Præterea est $x^4 + lx^3 \propto m m x x - p^4$, & consequenter $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{m m}$, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{m}$. Invenimus ergo, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{m}$, at minorem quàm $\frac{m m}{l}$ & m .

$$\text{Prop. 7. } x^4 - lx^3 - m m x x^* + p^4 \propto 0.$$

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \propto m m x x - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l , ipsam x quoque fore æqualem ipsi $\frac{p^4}{m}$; & per consequens, si fuerint termini l & $\frac{p^4}{m}$ æquales, erit una radicum æquationis propositæ æqualis singulis illorum; & si fuerint inæquales, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter illos duos constituta. Eodem modo per transpositionem est $x^4 - m m x x \propto lx^3 - p^4$. Unde similiter constat, si fuerit x æqualis ipsi m , fore quoque x æqualem ipsi $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$; ideoque si æquales fuerint m & $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$, una radicum æquationis propositæ æqualis erit cuilibet horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter illos duos constituta. Porro per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \propto lx^3 + m m x x$, unde $lx^3 + m m x x$ majus erit quàm x^4 , & $lx + m m$ majus quàm $x x$. Jam si fuerit æquatio proposita realis,

lis, erit x vel æqualis, vel major, vel minor quàm m , & $l+m$ major quàm x . Quòd si fuerit x minor quàm m , multo magis ipsa minor erit quàm $l+m$.

Deinde ex eadem æquatione $x^4 + p^4 \propto lx^3 + m m x x$ etiam constat, quòd $lx^3 + m m x x$ majus est quàm p^4 . Atqui inventa est $l+m$ major quàm x . Ergo $l l x x + l m x x$ majus erit quàm $l x^3$, & $l l x x + l m x x + m m x x$ majus quàm p^4 , ideoque $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{l+l+m+m}$. Hinc cum $l l x x + 2 l m x x + m m x x$ multò majus sit quàm p^4 , erit quoque per consequens $l x + m x$ majus quàm $p p$, & x major quàm $\frac{p p}{l+m}$. Quare invenimus quamlibet duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\sqrt{\frac{p^4}{l+l+m+m}}$ & $\frac{p p}{l+m}$, at minorem quàm $l+m$.

Cæterum quoniam invenimus, quòd x necessariò est minor quàm $l+m$; patet, si x supponitur major quàm m , eam fore inter hos terminos $l+m$ & m . Quòd si m fuerit æqualis aut major quàm x ; quoniam $l x^3 + m m x x$ majus est quàm p^4 , erit & $l m x x + m m x x$ majus quàm p^4 , & $x x$ majus quàm $\frac{p^4}{l+m+m}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{l+m+m}}$. Quare unaquæque duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt{\frac{p^4}{l+m+m}}$, at minor quàm $l+m$.

C A P U T IX.

*De limitibus Æquationum quatuor dimensionum
tertio termino carentium.*

Prop. I. $x^4 - l x^3 + n^3 x - p^4 \propto 0$.

PER transpositionem est $x^4 - l x^3 \propto p^4 - n^3 x$. Unde patet, quòd si x æqualis est ipsi l , fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; ideoque si fuerit l æqualis ipsi $\frac{p^4}{n^3}$, hoc est, $l n^3 \propto p^4$, radix æquationis

S

tionis

tionis propositæ æqualis erit singulis terminorum l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si fuerint inæquales, unaquæque radicum æquationis propositæ, siue unam, siue tres habuerit, semper erit inter hos terminos. Præterea cognoscimus, quòd, si fuerint hi ultimi termini æquales, hoc est, $ln^3 \propto p^4$, substituto in æquatione proposita ln^3 loco p^4 , & divisâ æquatione per $x - l$, ipsa non possit aliam habere veram radicem quàm l .

$$\text{Prop. 2. } x^4 + lx^3 - n^3x - p^4 \propto 0.$$

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \propto p^4 - lx^3$. Unde constat, si x æqualis est ipsi n , fore quoque $x^3 \propto \frac{p^4}{l}$, hoc est, $x \propto \sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$; & si fuerit n æqualis ipsi $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$, radix æquationis æquabitur singulis horum terminorum; & si fuerint inæquales, erit necessariò inter duos. Deinde per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3$. Unde patet, si fuerit x æqualis ipsi p , fore quoque $xx \propto \frac{n^3}{l}$, hoc est, $x \propto \sqrt{\frac{n^3}{l}}$; ideoque si fuerit p æqualis ipsi $\sqrt{\frac{n^3}{l}}$, radix æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum, & si fuerint inæquales, erit necessariò inter utrosque.

$$\text{Prop. 3. } x^4 - lx^3 - n^3x - p^4 \propto 0.$$

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto n^3x + p^4$, ideoque x major quàm l . Eodem modo est $x^4 - n^3x \propto lx^3 + p^4$, ac proinde x major quàm n , & nx^3 majus quàm n^3x . Similiter est $x^4 - p^4 \propto lx^3 + n^3x$, ideoque x major quàm p , & px^3 majus quàm p^4 . Sed per transpositionem est quoque $lx^3 + n^3x + p^4 \propto x^4$. Quare $lx^3 + n^3x + p^4$ majus erit quàm x^4 , & $l + n + p$ major quàm x . Ergo invenimus radicem x æquationis propositæ majorem esse quàm l , n , & p , at minorem quàm $l + n + p$. Porro ex hac æquatione $lx^3 + n^3x + p^4 \propto x^4$ etiam constat, quòd $lx^3 + n^3x$ est minus quàm x^4 ; & quandoquidem invenimus l minorem esse quàm x , erit l^3x minus quàm lx^3 , ideoque $l^3x + n^3x$ multò minus quàm x^4 , & x^3 major quàm $l^3 + n^3$. Non dissimili ratione demonstrabitur, quòd x major est quàm $\sqrt[3]{l^3 + p^4}$ & $\sqrt[3]{ln^3 + p^4}$.

Prop.

Prop. 4. $x^4 + lx^3 + n^3x - p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 = p^4 - n^3x$, ideoque $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Eodem modo est $x^4 + n^3x = p^4 - lx^3$, ac proinde $\frac{p^4}{l}$ majus quàm x^3 . Similiter est $lx^3 + n^3x = p^4 - x^4$, & per consequens p major quàm x , & p^3x majus quàm x^4 , ac $lppx$ majus quàm lx^3 . Sed per transpositionem propositionis est quoque $x^4 + lx^3 + n^3x = p^4$. Quare $p^3x + lppx + n^3x$ majus erit quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$. Et sic inventa est radix x æquationis propositæ major quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + n^3}$, at minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$, & p .

Prop. 5. $x^4 - lx^3 + n^3x + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $n^3x + p^4 = lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x . Deinde est $x^4 + p^4 = lx^3 - n^3x$, quare erit xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$, hoc est, x major quàm $\sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$. Sed est quoque $x^4 + n^3x = lx^3 - p^4$, ideoque x^3 majus quàm $\frac{p^4}{l}$, & x major quàm $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$. Quare invenimus, quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ necessariò major est quàm $\sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$ & $\sqrt[3]{C. \frac{p^4}{l}}$, at minor quàm l .

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - n^3x + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 + p^4 = n^3x - lx^3$, ideoque $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx , hoc est, x minor quàm $\sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$. Deinde est $x^4 + lx^3 = n^3x - p^4$, ideoque x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Præterea est $lx^3 + p^4 = n^3x - x^4$, & idcirco n^3 major quàm x^3 , hoc est, x minor quàm n . Ergo invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{p^4}{n^3}$, at minorem quàm $\sqrt[3]{\frac{n^3}{l}}$ & n .

S 2

Prop.

Prop. 7. $x^4 - lx^3 - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem habebimus $x^4 - lx^3 \propto n^3x - p^4$. Unde patet, si x æqualis est ipsi l , fore quoque x æqualem ipsi $\frac{p^4}{n^3}$; & per consequens, si fuerint hi termini l & $\frac{p^4}{n^3}$ æquales, hoc est, $ln^3 \propto p^4$, una ex radicibus æquationis propositæ æqualis erit singulis horum terminorum æqualium l & $\frac{p^4}{n^3}$; & si inæquales fuerint, neutra duarum radicum æquationis propositæ poterit esse inter ipsos. Deinde per transpositionem est $x^4 - n^3x \propto lx^3 - p^4$. Unde simili modo patet, si x æquatur ipsi n , ipsam x quoque æquari ipsi $\sqrt[n]{C \cdot \frac{p^4}{l}}$; ideoque si termini hi n & $\sqrt[n]{C \cdot \frac{p^4}{l}}$ æquales fuerint, una radicum æquationis propositæ æquabitur singulis horum terminorum æqualium; & si fuerint inæquales, nulla radicum æquationis propositæ erit inter utrosque. Porro per transpositionem est quoque $x^4 + p^4 \propto lx^3 + n^3x$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4 , & $lxx + n^3$ majus quàm x^3 . Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major vel minor quàm m . Quod si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + nxx$ majus quàm x^3 . Sin verò minor sit, erit x multò minor quàm $l+n$. Quare utraque duarum radicum propositæ æquationis necessariò minor erit quàm $l+n$. Quin & existente $x^4 + p^4 \propto lx^3 + n^3x$, erit quoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4 . Atqui invenimus $l+n$ majorem esse quàm x , ac proinde $ll + nn + 2ln$ majus quàm xx , & $l^3 + lnn + 2lln$ majus quàm lxx , nec non $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3 . Ergo $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus erit quàm p^4 , & x major quàm $\sqrt[n]{\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}}$. Et quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multò magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Invenimus itaque quòd quælibet duarum radicum æquationis propositæ major est quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$, ut & major quàm $\sqrt[n]{\frac{p^4}{l^3 + lnn + 2lln + n^3}}$, at minor quàm $l+n$. Præterea, quoniam $l+n$ major est quàm x , si fuerit x major

major quàm n , erit necessario inter hos terminos $l+n$ & n . Quòd si verò n fuerit vel æqualis vel major quàm x , quia $lx^3 + n^3 x$ majus est quàm p^4 , erit & $lnnx + n^3 x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{lnn+n^3}$. Ac proinde quælibet radicem æquationis propositæ major erit quàm minor horum terminorum n & $\frac{p^4}{lnn+n^3}$, ac minor quàm $l+n$.

CAPUT X.

De limitibus Æquationum quatuor dimensionum, in quibus nullus terminus deest.

Prop. 1. $x^4 - lx^3 + mxx - n^3x + p^4 = 0$.

PER transpositionem est $lx^3 + n^3x \propto x^4 + mxx + p^4$, ideoque $lx^3 + n^3x$ majus quàm x^4 , & $lxx + n^3$ majus quàm x^3 . Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lxx + n^3x$ majus quàm x^3 , hoc est, $l+n$ major quàm x , & x minor quàm n . Multo igitur magis minor erit quàm $l+n$. Ergo x necessario minor erit quàm $l+n$. Deinde ex eadem æquatione $lx^3 + n^3x \propto x^4 + mxx + p^4$ constat, esse $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4 . Sed inventa est $l+n$ major quàm x , ac per consequens $ll+nn+2ln$ majus quàm xx , & $l^3x + lnnx + 2llnx$ majus quàm lx^3 . Quare erit $l^3x + lnnx + 2llnx + n^3x$ majus quàm p^4 , & x major quàm $\frac{p^4}{l^3+lnn+2lln+n^3}$; & quandoquidem cubus ex $l+n$ major est quàm $l^3 + lnn + 2lln + n^3$, multo magis erit x major quàm p^4 divisum per cubum ex $l+n$. Inventus est itaque terminus unus major & alter minor quàm unaquæque radicem æquationis propositæ, siue hæc duas siue quatuor radices habuerit. Præterea, quoniam invenimus, quòd $l+n$ semper major est quàm x , si ponatur x quoque major quàm n ; manifestum est eam esse inter duos terminos $l+n$ & n . Quòd si autem x fuerit æqualis vel minor quàm n , quoniam est $lx^3 + n^3x$ majus quàm p^4 ; erit $lnnx + n^3x$ majus.

majus quàm p^+ , ideoque x major quàm $\sqrt[n]{\frac{p^+}{lnn+n^3}}$. Ergo unaquæque radicum propositæ æquationis, sive duas, sive tres habuerit, major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\sqrt[n]{\frac{p^+}{lnn+n^3}}$, at minor quàm $l+n$.

$$\text{Prop. 2. } x^4 - lx^3 + m mx + n^3 x + p^+ \propto 0.$$

Per transpositionem est $m mx + n^3 x + p^+ \propto lx^3 - x^4$, ideoque l major quàm x . Similiter est $x^4 + n^3 x + p^+ \propto lx^3 - m mx$, ac idcirco x major quàm $\frac{mm}{l}$. Præterea est $x^4 + m mx + p^+ \propto lx^3 - n^3 x$, ac per consequens xx majus quàm $\frac{n^3}{l}$. Denique est $x^4 + m mx + n^3 x \propto lx^3 - p^+$, & consequenter x^2 major quàm $\frac{p^+}{l}$. Quare invenimus, unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse quàm $\frac{mm}{l}$, $\sqrt[n]{\frac{n^3}{l}}$, & $\sqrt[n]{C \cdot \frac{p^+}{l}}$, at minorem quàm l .

$$\text{Prop. 3. } x^4 - lx^3 - m mx - n^3 x + p^+ \propto 0.$$

Per transpositionem est $lx^3 + m mx + n^3 x \propto x^4 + p^+$, ideoque $lx^3 + m mx + n^3 x$ majus quàm x^4 . Jam si proposita æquatio fuerit realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm maxima duarum m & n . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $lx^3 + m mx + n^3 x$ majus quàm x^4 , & $l+m+n$ major erit quàm x , & magis si fuerit x minor quàm maxima duarum m & n . Quare $l+m+n$ erit necessario major quàm x . Præterea m erit aut æqualis, aut major, aut minor quàm n . Quòd si fuerit æqualis aut major, & quidem x major quàm m , erit radix æquationis propositæ inter hosce terminos $l+m+n$ & m . Quòd si, existente m æquali aut majore quàm n , etiam m sit æqualis vel major quàm x ; erit & $lmmx + m^3 x + n^3 x$

$+n^3x$ æquale aut majus quàm $lx^3+mmxx+n^3x$, ac per consequens majus quàm p^4 ; ideoque x major quàm

$\sqrt[4]{\frac{p^4}{lm+mn+n^3}}$. Unde si fuerit m vel æqualis vel major quàm n , erit x necessariò major quàm minor horum duorum terminorum m & $\sqrt[4]{\frac{p^4}{lm+mn+n^3}}$; & si n fuerit major quàm m , consimili ratione demonstrabitur x etiam necessariò majorem esse minore horum duorum terminorum n & $\sqrt[4]{\frac{p^4}{ln+mm+nn}}$. Invenimus ergo unamquamque duarum radicum æquationis propositæ majorem esse minore horum terminorum m & $\sqrt[4]{\frac{p^4}{lm+mn+n^3}}$, si m vel æqualis vel major fuerit quàm n ; aut majorem minore duorum n & $\sqrt[4]{\frac{p^4}{ln+mm+nn}}$, si n major sit quàm m ; at verò semper minorem quàm $l+m+n$.

Prop. 4. $x^4 - lx^3 - mmxx + n^3x + p^4 = 0$.

Per transpositionem est $lx^3+mmxx \propto x^4+n^3x+p^4$, ideoque lx^3+mmxx majus quàm x^4 , & $lx+mm$ majus quàm xx . Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit & x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm m . Quod si fuerit æqualis vel major, erit $lx+mx$ majus quàm xx , & $l+m$ major quàm x ; & multò magis, si fuerit x minor quàm m . Ergo x necessariò minor erit quàm $l+m$. Unde si fuerit x major quàm m , erit inter hosce terminos $l+m$ & m . Quòd si x fuerit vel æqualis vel minor quàm m , quandoquidem & lx^3+mmxx majus est quàm p^4 ; erit $lmxx+mmxx$ majus quàm p^4 ; ideoque xx majus quàm $\sqrt[4]{\frac{p^4}{lm+mm}}$, & x major quàm $\sqrt[4]{\frac{p^4}{lm+mm}}$. Quare quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor duorum terminorum m & $\sqrt[4]{\frac{p^4}{lm+mm}}$, at minor quàm $l+m$.

Prop.

Prop. 5. $x^4 + lx^3 + mxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Demonstrabitur ex transpositionibus requisitis n^3x fore majus quàm x^4 , ideoque n majorem quàm x ; & n^3x majus quàm lx^3 , ac proinde $\frac{n^3}{l}$ majus quàm xx ; & denique n^3x majus quàm p^4 , & per consequens x majorem quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Invenimus itaque terminum unum majorem singulis radicum æquationis propositæ, at verò duos alios minores.

Prop. 6. $x^4 + lx^3 - mxx - n^3x + p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $mxx + n^3x \propto x^4 + lx^3 + p^4$; ideoque $mxx + n^3x$ majus quàm x^4 , & $mxx + n^3$ majus quàm x^3 . Jam si fuerit proposita æquatio realis, erit x realis, & vel æqualis vel major vel minor quàm n . Quòd si fuerit æqualis vel major, erit $mxx + n^3x$ majus quàm x^3 , & $\sqrt{mm + nn}$ major quàm x ; & multò magis, si fuerit x minor quàm n . Quare erit $\sqrt{mm + nn}$ semper major quàm x , & x erit inter terminos $\sqrt{mm + nn}$ & n , si major est quàm n . Quòd si fuerit æqualis aut minor quàm n , quoniam est $mxx + n^3x$ majus quàm p^4 , erit quoque $mnnx + n^3x$ majus quàm p^4 , ideoque x major quàm $\frac{p^4}{mnn + n^3}$. Ergo quælibet duarum radicum æquationis propositæ major erit quàm minor horum duorum terminorum n & $\frac{p^4}{mnn + n^3}$, at minor quàm $\sqrt{mm + nn}$.

Prop. 7. $x^4 + lx^3 - mxx + n^3x + p^4 \propto 0$.

Factis transpositionibus requisitis, demonstrabitur esse x minorem quàm m & $\frac{mm}{l}$, at majorem quàm $\frac{n^3}{mm}$ & $\frac{pp}{m}$.

Prop.

Prop. 8. $x^4 - lx^3 + mxx - n^3x - p^4 = 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 = n^3x + p^4 - mxx$, id-
coque si fuerit $x^4 \propto lx^3$, erit $x \propto l$, & $ln^3 \propto n^3x$, & $n^3x + p^4$
 $\propto mxx$, ac proinde $ln^3 + p^4 \propto mxx$, & $x \propto \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$.
Unde patet, si fuerit $l \propto \sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$, hoc est, si habeatur $llmm$
 $\propto ln^3 + p^4$; radicem æquationis propositæ fore æqualem sin-
gulis terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{ln^3 + p^4}{mm}}$; ac idcirco, substi-
tuto in hoc casu in æquatione proposita valore ipsius p^4 , nempe
 $llmm - ln^3$, ipsam esse divisibilem per $x - l$. Quod si fuerit x^4
majus quàm lx^3 , hoc est, x major quàm l , erit quoque $n^3x + p^4$
majus quàm mxx ; & si fuerit lx^3 majus quàm x^4 , hoc est,
 l major quàm x , erit & mxx majus quàm $n^3x + p^4$. Jam
quandoquidem æquatio proposita est realis, erit x realis & vel
æqualis, vel major, vel minor quàm p . Quod si fuerit æqualis
vel major quàm p , sitque major quàm l , quoniam tunc $n^3x + p^4$
quoque majus est quàm mxx , erit & $n^3x + p^3x$ majus quàm
 mxx , & $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ majus quàm x . Ergo in hoc casu erit x major
quàm l , & minor quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$. Quod si autem x minori exi-
stente quàm l , ipsa sit æqualis vel major quàm p , quoniam &
tunc $n^3x + p^4$ minus est quàm mxx , erit similiter $n^3x + p^3x$
minus quàm mxx , & consequenter $\frac{n^3 + p^3}{mm}$ minus quàm x .
Igitur in hoc casu erit x minor quàm l , & major quàm $\frac{n^3 + p^3}{mm}$.
Quare universaliter apparet, æquationem propositam non ha-
bere præter unam radicem realem ipsi l æqualem, cum est $llmm$
 $\propto ln^3 + p^4$; modò quælibet radicem, sive unam, sive tres ha-
buerit, fuerit semper necessariò inter maximum & minimum
trium terminorum l , $\frac{n^3 + p^3}{mm}$, & $\sqrt{\frac{n^3p + p^4}{mm}}$.

T

Prop.

Prop. 9. $x^4 - lx^3 + mxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 \propto p^4 - mxx - n^3x$, ideoque si fuerit $x^4 \propto lx^3$, hoc est, $x \propto l$, erit $mxx - n^3x + p^4$, & per consequens $mxx \propto -n^3l + p^4$, & $xx \propto \frac{p^4 - l n^3}{m}$, & $x \propto \sqrt{\frac{p^4 - l n^3}{m}}$. Quod si ergo l æqualis est $\sqrt{\frac{p^4 - l n^3}{m}}$, hoc est, si fuerit $l m m \propto p^4 - l n^3$; radix æquationis propositæ æqualis erit unicuique terminorum æqualium l & $\sqrt{\frac{p^4 - l n^3}{m}}$: ideoque si in hoc casu in æquatione proposita loco p^4 substituatur ejus valor, nempe $l m m + l n^3$, apparebit ipsam dividi posse per $x - l$, atque nullam aliam radicem veram admittere præter l . Si verò x^4 fuerit majus quàm lx^3 , hoc est, x major quàm l , erit & p^4 majus quàm $mxx + n^3x$; & contra, si fuerit l major quàm x , erit etiam $mxx + n^3x$ majus quàm p^4 . Jam si æquatio proposita est realis, erit x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm n . Est igitur, quod x major quàm l sit vel æqualis vel major quàm n ; quare cum & p^4 tunc majus sit quàm $mxx + n^3x$, erit quoque p^4 majus quàm $m m n x + n^3x$; ideoque $\frac{p^4}{m m n + n^3}$ majus quàm x . Quare in hoc casu erit x major quàm l , & minor quàm $\frac{p^4}{m m n + n^3}$. Quod si x , cum major est quàm l , minor fuerit quàm n , erit & p^4 majus quàm $mxx + n^3x$, ideoque multò majus quàm $m m x + n n x x$, & consequenter $\frac{p^4}{m m + n n}$ majus quàm xx , & $\sqrt{\frac{p^4}{m m + n n}}$ major quàm x . Quare in hoc casu x erit major quàm l , & minor quàm $\sqrt{\frac{p^4}{m m + n n}}$. Quod si verò x , cum minor est quàm l , vel æqualis fuerit vel major quàm n , erit $mxx + n^3x$ majus quàm p^4 , ideoque $m m x + n n x x$ majus quàm p^4 , & xx majus quàm $\frac{p^4}{m m + n n}$, & x major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{m m + n n}}$. Ergo in hoc casu erit x

minor

minor quàm l , & major quàm $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$. Postremò, cùm x minor quàm l , etiam ipsa minor sit quàm n , erit $mmxx + n^3x$ majus quàm p^4 , & $mmnx + n^3x$ multò majus quàm p^4 , & per consequens x major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$. Igitur x in hoc casu, minor erit quàm l , & major quàm $\frac{p^4}{mmn+n^3}$.

Quæ cum ita sint, constat universaliter, æquationem propositam non habere nisi unam veram radicem, quæ æqualis est ipsi l , quando est $llmm \propto p^4 - l n^3$, modo unaquæque radicem, sive unam tantum, sive tres habuerit, fuerit semper necessario inter maximum & minimum trium terminorum l , $\frac{p^4}{mmn+n^3}$, & $\sqrt{\frac{p^4}{mm+nn}}$.

$$\text{Prop. 10. } x^4 - lx^3 - mmxx - n^3x - p^4 \propto 0.$$

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur, quòd x major est quàm l , m , n , & p . Deinde erit quoque per transpositionem $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto x^4$, & per consequens $lx^3 + mx^3 + nx^3 + px^3$ majus quàm x^4 , & $l + m + n + p$ major quàm x . Porro, quoniam est $x^4 \propto lx^3 + mmxx + n^3x + p^4$, erit x^4 majus quàm $lx^3 + mmxx$, & xx majus quàm $lx + mm$, ideoque multo magis x major erit quàm $\sqrt{ll+mm}$ & $\sqrt{lm+mm}$. Similiter, cum x^3 major sit quàm $lx + mmx + n^3$, erit multo magis major quàm $l^3 + m^3 + n^3$, $l^3 + lmm + n^3$, & $2lmm + n^3$, & sic de reliquis terminis, quos substituere licet loco x^3 , minores quàm x^4 . Sic x^4 majus est quàm $l^4 + m^4 + n^4$, quàm $m^4 + n^4 + p^4$, & sic de reliquis. Præterea, quoniam x major est quàm n & p , & $lx^3 + mmxx + n^3x + p^4 \propto x^4$, erit $lx^3 + mmxx + nnxx + ppxx$ majus quàm x^4 , ideoque $lx + mm + nn + pp$ majus quàm xx aliqua quantitate. quæ quidem quantitas, etiam si sit incognita, si appelletur zz , habebitur $lx + mm + nn + pp \propto xx + zz$. Quantitas autem hæc incognita zz necessario minor erit quàm $mm + nn + pp$, aliàs, ablatis ex duabus partibus æquationis præcedentis, æqualibus, aut minori quantitate ex prima &

ma & majori ex secunda, esset reliqua lx aut æqualis, aut major quàm xx . Quod foret absurdum, quandoquidem x demonstrata est major quàm l . Quare habemus hanc æquationem $xx \propto lx + mm + nn + pp - \zeta\zeta$, quæ erit realis, eritque $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$. Manifestum verò est, quòd $\frac{1}{2}l + mm + nn + pp$ majus est quàm $\frac{1}{2}ll + mm + nn + pp - \zeta\zeta$. Ergo $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$ major erit quàm x , ideoque $\sqrt{ll + mm + nn + pp}$ multo magis major erit quàm x ; ita ut radix propositæ æquationis necessariò sit inter $\sqrt{ll + mm}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + nn + pp}$.

Prop. II. $x^4 - lx^3 - mxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - lx^3 - mxx \propto p^4 - n^3x$. Unde, si fuerit $x^4 - lx^3 - mxx \propto 0$, hoc est, omnibus per xx divisis, $x^2 - lx - mm \propto 0$, erit quoque $p^4 - n^3x \propto 0$. Hoc est, si fuerit $xx \propto lx + mm$, vel $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; erit & $p^4 \propto n^3x$, vel $x \propto \frac{p^4}{n^3}$. Quare constat, si fuerit $\frac{p^4}{n^3} \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ fore æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm $lx^3 + mxx$, hoc est, xx majus quàm $lx + mm$; erit p^4 etiam majus quàm n^3x , hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Jam existente xx majori quàm $lx + mm$, erit $xx \propto lx + mm$ plus aliquâ quantitate. Quæ quidem quantitas, etiamsi sit incognita, si vocetur $\zeta\zeta$: habebitur $xx \propto lx + mm + \zeta\zeta$, & $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + \zeta\zeta}$, eritque x major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit x^4 minus quàm $lx^3 + mxx$, hoc est, xx minus quàm $lx + mm$; erit & p^4 minus quàm n^3x , hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc existente xx minori quàm $lx + mm$, erit

erit $x \propto lx + mm$ minus aliquâ quantitate. Quæ si nominetur z , habebitur $x \propto lx + mm - z$, hoc est, $x \propto \frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm} - z$, eritque x minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^2}{n^2}$, & minor quàm $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare universaliter patet, radicem æquationis propositæ æqualem esse ipsi $\frac{p^2}{n^2}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, quando $\frac{p^2}{n^2}$ æquatur ipsi $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; Sin secus, quamlibet radicem, sive unam tantum, sive tres habuerit, semper esse inter hosce terminos $\frac{p^2}{n^2}$ & $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

Prop. 12. $x^4 + lx^3 + mmxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - p^4 \propto n^3x - lx^3 - mmxx$; ideoque si fuerit $x \propto p$, erit quoque $n^3x \propto lx^3 + mmxx$, & $x \propto \frac{n^3}{l + m}$. Unde constat, si $lpp + mmp$ æquetur n^3 , radicem æquationis fore æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{l + m}$. Quòd si fuerit x^4 majus quàm p^4 , hoc est, x major quàm p , erit quoque n^3x majus quàm $lx^3 + mmxx$. Jam si æquatio proposita est realis, erit & x realis, & vel æqualis, vel major, vel minor quàm m . Quòd si fuerit æqualis vel major quàm m , & eadem quantitas x etiam major sit quàm p , quandoquidem & tunc n^3x majus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x majus quàm $lmxx + mmxx$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm x . Quare in hoc casu erit x major quàm p , & minor quàm $\frac{n^3}{l + m}$. Quòd si existente x majore quàm p ipsa minor sit quàm m , erit n^3x majus quàm $lx^3 + mx^3$, & $\frac{n^3}{l + m}$ majus quàm xx . Ergo in hoc casu erit x major quàm p , & minor quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l + m}}$. Quòd si verò, x minori existente quàm p , ipsa sit major quàm m , vel eidem æqualis, quandoquidem & tunc n^3x minus est quàm $lx^3 + mmxx$, erit n^3x minor.

minor quàm $lx^3 + mx^2$, hoc est, xx majus quàm $\frac{n^3}{l+m}$. Quare in hoc casu erit x minor quàm p , & major quàm $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$. Denique, cum fuerit x minor quàm p , & ipsa etiam minor quàm m , quoniam & tunc n^3x minus est quàm $lx^3 + mxx$, erit n^3x minus quàm $lmxx + mxx$, & x major quàm $\frac{n^3}{lm+mm}$. Unde constat universaliter, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium p & $\frac{n^3}{lp+mm}$, cum est $lpp + mmp$ æquale ipsi n^3 ; sed cum inæquales sunt, esse radicem æquationis propositæ necessariò inter majorem & minorem terminorum p , $\sqrt{\frac{n^3}{l+m}}$, & $\frac{n^3}{lm+mm}$.

Prop. 13. $x^4 + lx^3 + mxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Factis necessariis transpositionibus, demonstrabitur x fore minorem quàm p , $\sqrt{C \cdot \frac{p^4}{l}}$, $\sqrt{\frac{p^4}{mm}}$, & $\frac{p^4}{n^3}$; at verò majorem quàm $\frac{p^4}{p^3 + lpp + mmp + n^3}$.

Prop. 14. $x^4 + lx^3 - mxx - n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 - n^3x \propto mxx + p^4 - lx^3$; ideoque si fuerit $x^4 \propto n^3x$, hoc est, $x \propto n$, erit $mxx + p^4 \propto lx^3$, hoc est, $\frac{mmn + p^4}{l} \propto x^3$. Quòd si fuerit x major quàm n , erit & $mxx + p^4$ majus quàm lx^3 : si minor fuerit, erit $mxx + p^4$ minus quàm lx^3 . Jam, si x major est quàm n , & etiam vel æqualis vel major quàm p , quandoquidem & tunc $mxx + p^4$ majus est quàm lx^3 , multo magis erit $mxx + ppp$ majus quàm lx^3 , hoc est, $\frac{mm + pp}{l}$ majus quàm x . Ergo in hoc casu erit x major quàm n , & minor quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Quòd si x major fuerit quàm n , & etiam minor quàm p , quoniam & tunc $mxx + p^4$ majus est quàm lx^3 , erit quoque $mmp + p^4$ majus quàm lx^3 , hoc est, x^3 minor quàm $\frac{mmp + p^4}{l}$, & x minor quàm $\sqrt{C \cdot \frac{mmp + p^4}{l}}$.
Quare

Quare in hoc casu erit x major quàm n , & minor quàm $\sqrt{C. \frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si x minor fuerit quàm n , & vel æqualis vel major quàm p , quandoquidem & tunc $mmxx+p^4$ minus est quàm lx^3 , erit quoque $mmpp+p^4$ minus quàm lx^3 , & x major quàm $\sqrt{C. \frac{mmpp+p^4}{l}}$. Ergo in hoc casu erit x minor quàm n , & major quàm $\sqrt{C. \frac{mmpp+p^4}{l}}$. Quòd si verò x minor fuerit quàm n , & ipsa etiam minor sit quàm p , quoniam & tunc $mmxx+p^4$ minor est quàm lx^3 ; erit quoque $mmxx+ppxx$ minus quàm lx^3 , & $\frac{mm+pp}{l}$ minus quàm x . Quare in hoc casu, erit x minor quàm n , & major quàm $\frac{mm+pp}{l}$. Unde universaliter apparet, radicem æquationis propositæ necessariò esse inter maximum, & minimum trium terminorum n , $\frac{mm+pp}{l}$, & $\sqrt{C. \frac{mmpp+p^4}{l}}$.

Prop. 15. $x^4 + lx^3 - mmxx + n^3x - p^4 \propto 0$.

Per transpositionem est $x^4 + lx^3 - mmxx \propto p^4 - n^3x$; ideoque si fuerit $x^4 + lx^3 - mmxx \propto 0$, seu, divisis omnibus terminis per xx , $xx + lx - mm \propto 0$; erit quoque $p^4 - n^3x \propto 0$, hoc est, si est $xx \propto lx + mm$, vel $x \propto -\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, erit $p^4 \propto n^3x$, seu $x \propto \frac{p^4}{n^3}$. Unde patet, si $\frac{p^4}{n^3}$ est æquale ipsi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ esse æqualem singulis terminorum æqualium $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit $x^4 + lx^3$ majus quàm $mmxx$, hoc est, $xx + lx$ majus quàm mm , erit quoque p^4 majus quàm n^3x , hoc est, $\frac{p^4}{n^3}$ majus quàm x . Ac proinde cum $xx + lx$ majus sit quàm mm , erit $xx + lx$ majus quàm mm aliquâ quantitate. Quantitas autem hæc, licet sit incognita, vocetur \mathcal{Z} , eritque $xx + lx \propto mm + \mathcal{Z}$, seu $xx \propto -lx + mm + \mathcal{Z}$; hoc est, $x \propto -\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm + \mathcal{Z}}$, ideoque x major quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Ergo in hoc casu x minor erit quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & major quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quòd si fuerit $x^4 + lx^3$ minus

152 DE LIMITIBUS ÆQUATIONUM.

nus quàm $mmxx$, hoc est, $xx + lx$ minus quàm mm , erit quoque p^4 minus quàm $n^3 x$, hoc est, x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$. Hinc cum $xx + lx$ minus sit quàm mm , erit $xx + lx$ minor quàm mm aliquâ quantitate. Vocetur quantitas hæc quamvis incognita zz , eritque $xx + lx + zz \propto mm$, vel $xx \propto -lx + mm - zz$, hoc est, $x \propto -\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm - zz}$, ideoque x minor erit quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Quare in hoc casu erit x major quàm $\frac{p^4}{n^3}$, & minor quàm $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$. Atque ita in genere perspicuum est, cum $\frac{p^4}{n^3}$ æquatur ipsi $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$, radicem æquationis propositæ æqualem esse singulis terminorum æquationis $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$; sin minus, quamlibet radicem, sive unam tantum, sive tres habuerit, necessario esse inter hosce terminos $\frac{p^4}{n^3}$ & $-\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{1}{4}ll + mm}$.

F I N I S.



JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.

Edita

Operâ FRANCISCI à SCHOOTEN,
in Academia Lugduno - Batava Mathematicos
Professoris.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
c15 155 LIX.

THE
ATMOSPHERE
CURVATURE
OF THE EARTH
AND
THE EFFECTS OF THE
ATMOSPHERE
ON THE
SUN, MOON, AND STARS



BY
J. H. VAN DER
WATER
AND
J. H. VAN DER
WATER

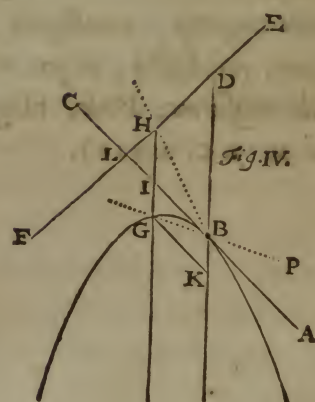
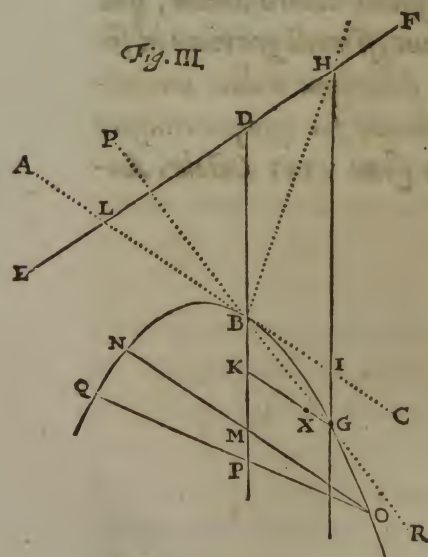
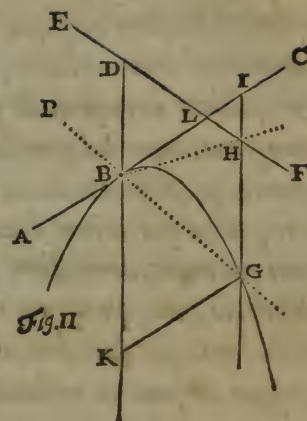
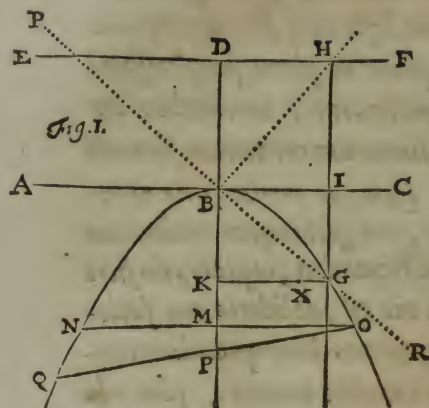
Clarissimo, Doctissimoq; Viro,
D^o FRANCISCO à SCHOOTEN,
IOHANNES DE WITT

S. P. D.

Linearum rectarum, angulorumque, quos comprehendunt, ut & figurarum rectilinearum, quæ inde nascuntur, nec non Circulorum naturam veram atque intrinsecam, proprietatesque præcipuas, meo quidem iudicio, satis perspicuè tradiderunt Antiqui; ac quo pacto ex iisdem traditis, imò ex paucis & principalioribus eorundem principiis, quelibet Problemata Plana, ac generaliter quæcunque in linearum rectarum, angulorum, figurarumque rectilinearum, nec non Circulorum contemplatione & cognitione desiderari queunt, resolvantur atque eruantur, universali quâdam viâ & Methodo Analyticâ, per Æquationum inventionem, harumque resolutionem, plenius planiusque à Recentioribus ostensum est; Adeo ut vel unico Circulo dato, utut exiguo aut ingenti, quæcunque Problemata Plana per solas lineas rectas unusquisque, in dictis Antiquorum Recentiorumque Geometrarum præceptis mediocriter versatus, facillimè resolvat; ac proinde de iisdem vel plura vel alio modo proposita ac demonstrata quædam desiderare, & supervacuum &

ineptum semper existimaui. At verò cum cæterarum
linearum curvarum Elementa, prout à Veteribus tra-
dita atque à Recentioribus explicata sunt, diligentius
considerassem, originem earum è solido peti atque inde
ipsas in planum transferri naturali ordini, qui in Ma-
thematicis quàm maximè observandus est, omnino
contrarium duxi; quemadmodum & demonstrationes
in iisdem Elementis propositas, multis in locis eadem
de causa & propter varias rationum compositiones,
quibus sæpe innituntur, subobscuras, ac longa Proposi-
tionum serie Lectoribus tædio memoriaeque oneri esse
judicavi. Atque eà quidem contemplatione excitatus
jampridem, dum studiis humanioribus Liberaliumque
Artium doctrinæ incumbere mihi otium erat, animad-
verti, non eas solùm, quas vulgò Coni sectiones ap-
pellârunt, sed & omnes omnino curvas lineas, cujus-
cunque sint generis, multipliciter quidem ex varia cor-
porum diversimodè compositorum aut figuratorum se-
ctione gigni; at verò earundem singulas infinitis quo-
que modis in plano generari, ipsarum autem naturam
& proprietates ex ea generatione multò facilius quàm
ex corporum sectione deduci; ac firmiter mihi persua-
sum habeo, nullam aliam esse causam, quòd linearum
curvarum secundi generis ulteriorumque graduum or-
tus, natura, proprietas, atque essentia, cum exacta spe-
cierum enumeratione, à nemine antehac explicata ac
demonstrata sint, quàm quòd tam in tractatione or-
tus

tus & generationis, quàm in demonstratione essentiae
ac proprietatum linearum curvarum primi generis à
naturali & simplicissima via deflexum sit, utpote cum
earundem contemplatio, prout in plano simplicissimè
& quidem diversimodè generantur, intellectum &
imaginationem ad genesin linearum curvarum secundi
generis quasi sponte ducat. Cumque eorum, quae ante-
hac, dum per otium licuit, eò spectantia meditat-
us sum, tu nunc, amicissime Schooteni, copiam tibi fieri
desideres, en, quantum in me est, desiderio tuo satis-
facio; quaeque de eodem argumento à me quondam con-
scripta ac pene in ordinem redacta inveni, jam tibi
mitto, tuique omnino juris facio; cetera autem, quae
sparsim tantùm annotata sunt, si modò graviora id fe-
rent negotia, recolligam, debitoque ordine conjun-
gam; recollecta, atque ordinata suo quoque tempore
tibi missurus; Vale. Hagæ Com: VIII Octobr. An-
ni M. DC. LVIII.



JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.

LIBER PRIMVS.

CAPUT I.

DEFINITIONES PRIMÆ.

I.

SI per rectam lineam immotam altera recta certo sui puncto sibi semper parallela moveatur aut incedat, eodemque illo motu anguli cujusdam rectilinei, circa punctum fixum (quod idem sit cum ejus vertice) circulariter mobilis, crurum unum semper per prædictum mobile punctum transiens secum ducat, atque ita simul cruris alterius, & dictæ lineæ incedentis intersectione curva describatur linea; recta, quæ, uti prædictum est, sibi semper parallela movetur aut incedit, *Describens* dicetur.

II.

Altera verò recta, immota manens, *Directrix* vocabitur.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, atque is qui ei est deinceps, *Angulorum mobilium* nomine venient.

IV.

IV.

At quos *describens* ad *directricem* efficit, *Anguli ad Directricem* dicentur.

V.

Punctum fixum, circa quod *angulus mobilis* circulariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

VI.

Ea autem *describens* pars, quæ inter *Polum*, & *directricem* intercipitur, *Intervallum* nominabitur.

VII.

Crus anguli mobilis, quod *describens* secum ducit, *Crus Patiens*.

VIII.

Alterum verò *crus*, quod à *describente* secatur, *Crus Efficiens*, & per anguli verticem productum, *Linea Efficiens* appellabitur.

IX.

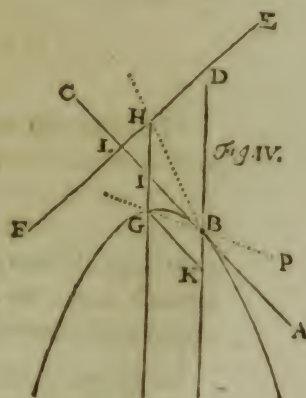
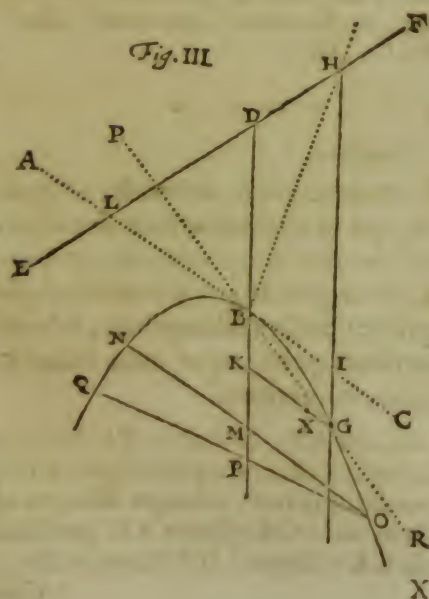
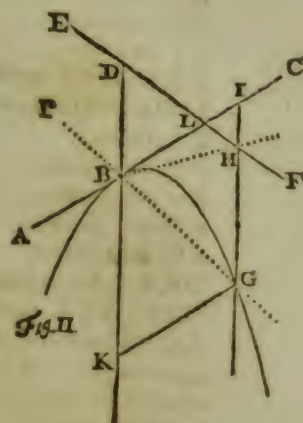
Cùm *describens* per *Polum* transit, ac proinde & cum *crure patiente* coïncidit, esse tam *describentem* quàm *crus patiens*, ut & *lineam efficientem* totumque *angulum mobilem* in *statione prima* constitutum dicemus; ac quoties de iis simpliciter sermo erit in tali ipsas positione considerabimus.

X.

Quamlibet curvam, interfectione, uti prædictum est, in plano genitam, descriptam dicemus, *efficiente* atque *intervallo* consideratis, ut exhibentur ac sibi invicem junguntur in *statione prima*; adè ut *efficiens* cum *intervallo*, quod tam cum ipsa *describente* quàm cum *crure patiente* in eadem statione coïncidit, *angulum mobilem* utrinque constituat.

Ut

Fig. I.



lariter

lariter mobilis circa punctum B; ita ut idem crus BH semper transeat per prædictum ipsius HG punctum H, simulque alterius cruris BG ac dictæ lineæ HG intersectione G describatur curva lineæ BG: erunt

HG *describens*.

EF *directrix*.

HBG, HBP *anguli mobiles*.

FHG, EHG *anguli ad directricem*.

B *Polus*.

BD *intervallum*.

BH *crus patiens*.

BG *crus efficiens*.

PG *linea efficiens*.

DK *describens in statione prima, sive describens simpliciter*.

DBC, DBA *anguli mobiles in statione prima*.

AC *efficiens in statione prima, sive efficiens simpliciter*.

Curvam BG, efficiente AC, intervallo verò BD descriptam dicemus; Et apparet, cum efficiens PG est in statione AC, crus patiens BH coincidere cum intervallo BD; ac describentem HG tunc esse in statione DK, atque per efficientem & intervallum constitui utrinque angulos mobiles DBC, DBA.

T H E O R E M A I.

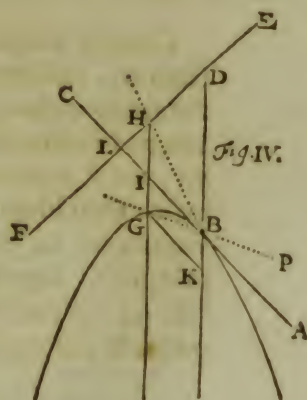
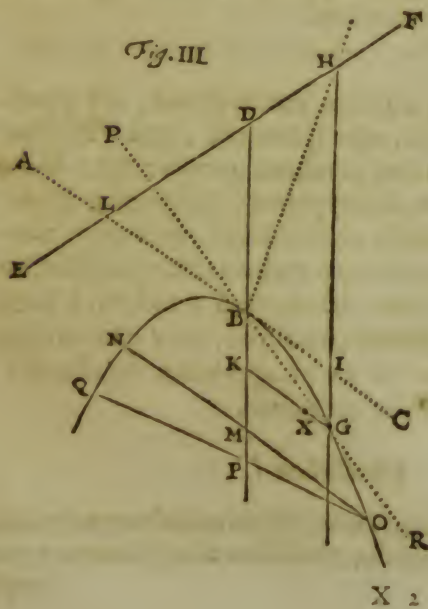
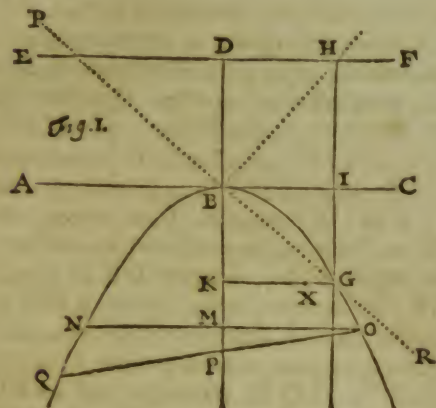
Propositio I.

Quâlibet efficiente, & quocunque intervallo, si anguli mobiles æquales sint iis, qui ad directricem sunt ab eadem parte, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quavis recta à quolibet curvæ puncto ad describentem efficienti æquidistans applicata possit rectangulum, sub intervallo atque ea describentis parte, quæ inter Polum & applicatam intercipitur, contentum.

Sit efficiente ABC, intervallo BD, & directrice EF descripta curva BG; ita ut angulus mobilis DBA sit æqualis angulo EDB ad directricem, sitque à puncto G in curva utcumque assumpto ad describentem DBK applicata recta GK efficienti AC parallela: dico quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale esse.

Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quàm *describente* in statione
uti fuere, cùm per ipsarum intersectionem descriptum est pun-
ctum G, veluti in HBG & HIG: si tam *angulus mobilis* quàm is



X 2

qui

164 ELEM. CURVARUM

¹ per Cor⁸ qui ad *directricem* est rectus sit, uti in prima figura, erit ¹ ut HI ad IB, ita IB ad IG, id est ², ut DB ad GK, ita GK ad BK. ² per 34 primi. ac proinde ³ quadratum rectæ GK rectangulo DBK æquale ³ per 17 sexti erit.

At verò si obliquus fuerit uterque angulorum ABD, EDB, uti in cæteris figuris, secabunt sese *efficiens* & *directrix* productæ ad eas partes, ubi *angulus mobilis*, isque qui ad *directricem* est, acuti erunt. sit itaque ipsarum intersectio in L puncto. Quoniam igitur tam anguli LBD, LDB, ex constructione, quàm LHI, LHI, propter parallelas DB, HI, æquales sunt ⁴; erunt quoque ⁵ tam lineæ LD, LB, quàm LH, LI; ac proinde & compositæ ⁶ vel residuæ ⁶ DH, BI æquales. Cum autem, angulis DBI, HBG iisdem, sive æqualibus existentibus, addito ⁷, vel ablato ⁸ communi angulo HBI, angulus DBH angulo IBG, id est ⁹, BGK, fiat æqualis; atque angulus BDH ex constructione angulo DBI, id est ⁷, BKG, sit æqualis: erunt ⁸ triangula BDH, GKB æquiangula, eritque proinde ⁹, ut BD ad DH sive BI, hoc est ¹⁰, ad GK, ita eadem GK ad KB. quare, ut supra ¹¹, quadratum applicatæ GK rectangulo DBK æquale erit. Quod est propositum.

⁴ per 29 primi. ⁵ per 29 primi. ⁶ per 32 primi. ⁷ per 4 sexti. ⁸ per 34 primi. ⁹ per 17 sexti.

Constat itaque, curvam intersectione, uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quæ Veteribus Parabola; *Polumq;* idem punctum quod vertex; *lineam* autem *describentem in statione prima* eandem quæ diameter, aut si *anguli mobiles* recti fuerint, quæ axis; *intervallum* verò idem quod latus rectum sive recentioribus Parameter ad eandem diametrum eundemvè axem pertinens; atque *efficienti* parallelas, eas, quæ ordinatim ad diametrum vel axem applicatæ dicebantur; quare & eadem nomina retineto.

Corollarium I.

Cum *describenti efficientisque* intersectio quibuscunque stationibus in uno tantum puncto fiat, manifestum est, *describentem* in quacunque

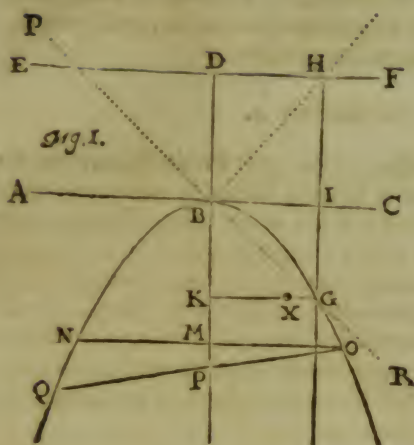


Fig. I.

cunque statione, id est, rectas omnes diametro æquidistantes, in uno tantum puncto Parabolæ occurrere.

Corollarium 2.

Cumque continuo descriptus à Polo recessu major majorque semper fiat angulus, quem *crus efficiens* constituit ad lineam efficientem in statione prima, veluti GBI, manifestum est, quamlibet rectam à Polo ad quodlibet curvæ punctum ductam, ut, ex. gr., BG, totam intra Parabolam, productam autem, uti ad R, extra Parabolam cadere.

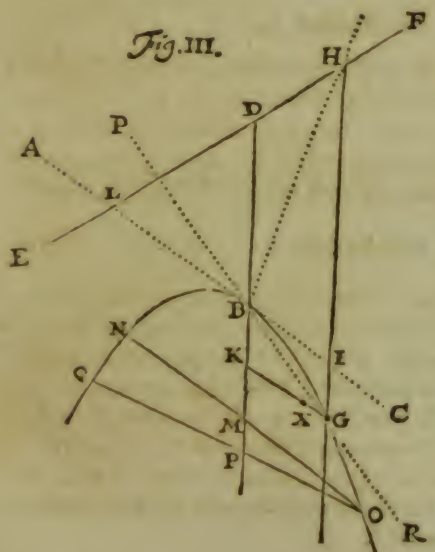


Fig. III.

Corollarium 3.

Constat præterea angulum GBK indefinitely quidem diminui, omni que proposito angulo rectilineo minorem reddi posse; sed *crus* tamen

efficiens BG nunquam cum *describente* BK coincidere, multò minus ipsam transire: ad hoc enim necessum foret, ut *crus patiens*

X 3

BH

¹ per 29 primi. BH directrici EF foret parallelum ¹, aut certè ut caderet infra eam, quæ à Polo directrici æquidistans ducta esset, quod planè impossibile est, cum directricem semper secet.

Corollarium 4.

Ideoque apparet, rectas omnes, quæ Parabolæ axem vel diametrum secant, productas tandem Parabolæ occurrere. Secet enim recta KX diametrum BKM, ac crux efficiens BG, in ea statione constitutum, ut KBG angulus minor sit dato angulo MKG ², at verò Parabolam in puncto G. Quoniam igitur recta KX cruri BG occurrit, aut eidem occurret inter B & G, quo casu ipsa producta etiam curvæ BG occurrura est ³, aut eidem in ipso G puncto occurret, quo casu & simul Parabolæ ibidem occurret, aut denique ipsi BG occurret ad partes G productæ, quo utique casu priùs Parabolæ occurret ⁴.

Corollarium 5.

Manifestum quoque est, applicatas omnes, utrinque Parabolâ terminatas, ab axe aut diametro bifariam dividi. Ut, si ducta sit applicata NMO, quoniam ⁵ tam quadratum NM quàm quadratum MO æquale est rectangulo DBM: erunt quoque eadem quadrata inter se æqualia, ac proinde & rectæ NM, MO æquales.

Corollarium 6.

Patet quoque præcedentis conversum, nempe non posse alias rectas præter eas, quæ efficienti æquidistant, in Parabola ab axe sive diametro bifariam secari. Si enim OQ, quæ non sit æquidistans ipsi AC, ab axe sive diametro BP bifariam divideretur in P, ductâ ON efficienti AC parallelâ, quæque proinde ab eodem axe sive diametro bifariam quoque secabitur in M ⁶, foret OP ad PQ, ut OM ad MN: ideoque ⁷ ducta recta per N & Q esset diametro parallela, ac Parabolæ occurreret in duobus punctis N & Q. quod fieri non potest ⁸.

Itaque non solum applicatæ omnes à diametro bifariam dividuntur, sed & quæ à diametro bisecantur ad can-

eandem ordinatim applicatæ sunt : & si diameter rectam quamlibet in Parabola ductam bifariam dividat omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam secabit.

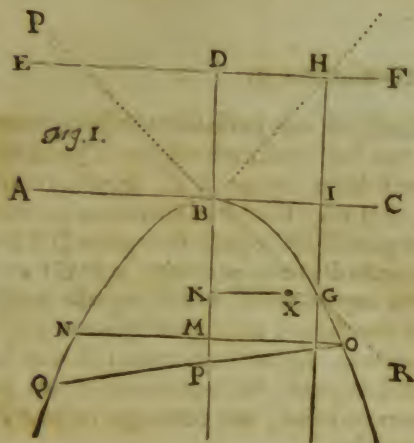


Fig. I.

Corollarium 7.

Ex demonstratis quoque facile colligitur, applicatarum quadrata ad se invicem esse, sicut ad se invicem sunt diametri portiones inter verticem. & applicatas interceptæ. Ut, si applicatæ sint GK, NM, erit $\frac{GK^2}{NM^2} = \frac{BK}{BM}$ per 1. hujus. ad quadratum ipsius NM, ut rectangulum DBK ad rectangulum DBM, id est $\frac{BK}{BM}$, ut BK ad BM.

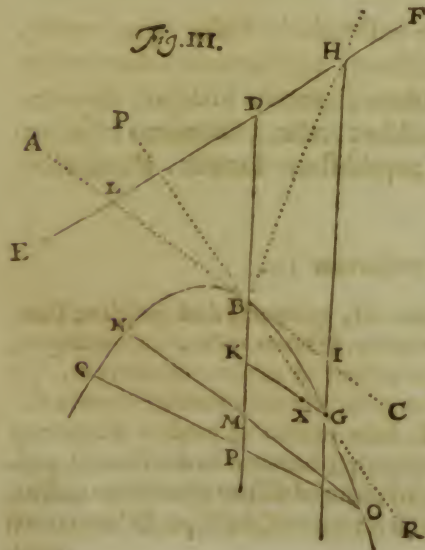


Fig. III.

Corollarium 8.

Ex ipsa porro descriptione manifestum est, efficiem in statione prima, id est, rectam, quæ per Polum sive verticem applicatis æquidistans ducitur, ibidem Parabolam nec in alio præterea puncto contingere, multò minùs eandem secare. Sum-

re. Sumpto enim in curva præter *Polum* B puncto utcunque, veluti G, si *crus efficiens* eidem applicetur, uti in positione BG, constituetur ab ipso & *efficiente* angulus, ut GBC: atque adeò punctum G, utcunque sumptum, id est, tota Parabola, præter *Polum* B, infra *efficientem* ABC cadet.

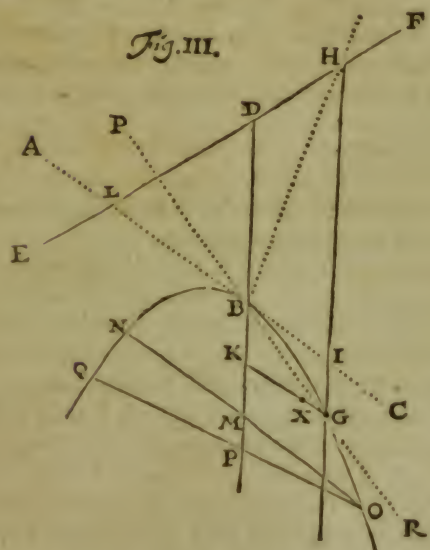
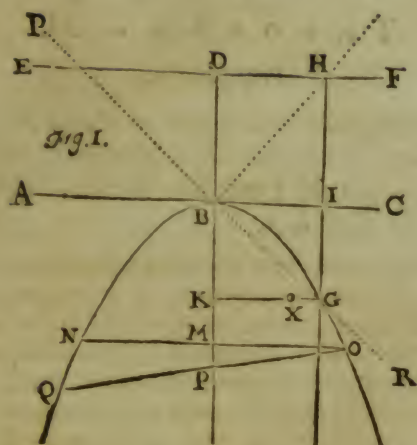
Corollarium 9.

Constat quoque ex antedictis, non posse aliam rectam præter *efficientem* Parabolam in *Polo* seu vertice contingere. Quoniam enim alia quævis recta per B ducta, ex. gr., PR, angulum constituit cum *efficiente* AC, ut RBC, si à *Polo* ad *directricem* ducatur recta BH, ita ut eidem angulo RBC æqualis sit angulus DBH, ac per punctum H agatur recta diametro parallela, ut HG: erit ea ipsa *describens*, & HBR *angulus mobilis*, utpote æqualis *angulo mobili* DBC; BR verò *crus efficiens*: ac proinde ipsarum HG, BR intersectio G in Parabola. Quare cum recta PR non in puncto B solummodo, sed & in puncto G Parabolæ occurrat, ac tota BG recta ^{per Corol. 1 huius.} intra curvam cadat, non continget recta PR Parabolam, sed eandem secabit.

Itaque omnes rectæ in Parabola ductæ, quæ contingenti in vertice æquidistant, ordinatim ad diametrum applicantur sive ab eadem diametro bifariam dividuntur; & contra, quæ cuilibet rectæ, à diametro bifariam divisæ, per verticem æquidistans ducitur, Parabolam in vertice contingit.

Corollarium 10.

Ex dictis quoque obvium est, quo pacto datâ positione Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem ordinatim applicatæ faciunt ad eandem diametrum, ipsa Parabola in plano describatur. Si enim describendæ Parabolæ diameter sit BK, vertex B, latus rectum ad eandem diametrum pertinens BD, (quod quidem ipsi diametro in directum sit positum,) atque angulus quem faciunt ad dictam diametrum ordinatim applicatæ ABK vel CBK: oportet, ductâ per D lateris recti
termi-



terminum rectâ EDF in angulo EDB ipsi ABD æquali, efficien-
te AC, & intervallo BD, ad directricem EF curvam describere, ut
NKG: eritque hæc ipsa, quæ describenda proponitur Parabola.

Y

THEO-

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si per assumptum utcumque in Parabola punctum recta ducatur, axi diametrovè parallela, erit quoque assumptum punctum Parabolæ vertex, ductaque parallela itidem diameter.

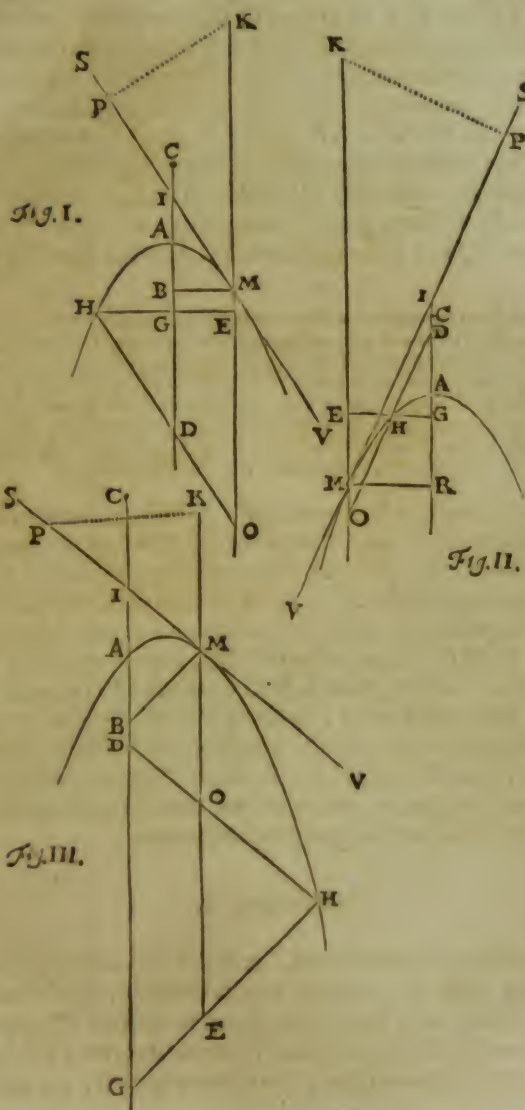
Sit Parabola quælibet HAM , cujus axis diametervè AB , & latus rectum ad eandem pertinens AC ; sitque per punctum M , in curva utcumque assumptum, ducta recta MO , axi sive diametro AB parallela: dico assumptum quoque punctum M verticem, dictamque MO diametrum esse; imò si, ductâ per M rectâ SV , ita ut ab axe sive diametro AB extra Parabolam abscindat portionem AI æqualem AB , quæ inter verticem A & applicatam MB intercipitur; productaque OM ad K , ita ut sit MK ipsis AB vel AI & IM tertia proportionalis, efficiens SV intervallo verò MK Parabola describatur: dico hanc cum exposita Parabola HAM eandem fore, ita ut altera alteri per omnia congruat, ac proinde non solum MO diametrum, atque M verticem fore, sed & MK latus rectum esse ad dictam diametrum MO pertinens, & SV Parabolam in vertice M contingere, omnesque ipsi parallelas in Parabola ductas ab MO bifariam dividi, atque ad hanc ipsam MO ordinatim applicari.

Sit enim in exposita Parabola HAM assumptum præterea aliud quodpiam punctum, ex.gr., H ; sitque ab eodem ducta HG ad axem sive diametrum AB ordinatim applicata, nec non HO ipsi SV æquidistans, quarum prior, si opus fuerit producta, rectæ KO occurrat in E ; posterior verò, itidem producta, ubi opus fuerit, prædictum axem sive diametrum AB secet in D . Et apparet¹, si quadratum rectæ HO æquale sit rectangulo KMO , Parabolam, quæ efficiens SV , intervallo verò MK describatur, per punctum quoque H transcurram. Esse autem quadratum rectæ HO æquale rectangulo KMO multifariam id quidem, & meo saltem iudicio, breviter simpliciterque satis in eum qui sequitur modum demonstratur.

¹ ex 1 hujus.

² per 1 hujus, & 17 sexti.

Quoniam est² ut CA ad MB , ita MB ad BA , erit, duplicatis



³ per 29 pri-
mi, & 4.
sexsi.
⁴ per 16
sexsi.
⁵ per 1 hu-
jus.
⁶ per 1 se-
cundi.
^a in casu
fig. I & si-
milibus.
^b in casu
fig. II & III
ac similibus. ⁷ quippe per supra demonstrata rectangulum HGE bis æquale est rectangulo sub CA
& GD. ^c in casu enim fig. I, si ab una parte ad bina quadrata rectarum HG & GE addatur
rectangulum HGE bis, compositum fit EH quadratum, per 4 secundi; ac si ab altera parte
ad rectangulum sub CA & IG addatur rectangulum sub CA & GD, fit, per I secundi, rectan-
gulum sub CA & ID seu MO. Eodem modo, si in casibus fig. II & III ab una parte à binis
quadratis rectarum HG & GE auferatur rectangulum HGE bis, residuum erit, per 7 secun-
di, EH quadratum; ac si ab altera parte à rectangulo sub CA & IG auferatur rectangulum sub
CA & GD residuum erit, per I secundi, rectangulum sub CA & ID seu MO.

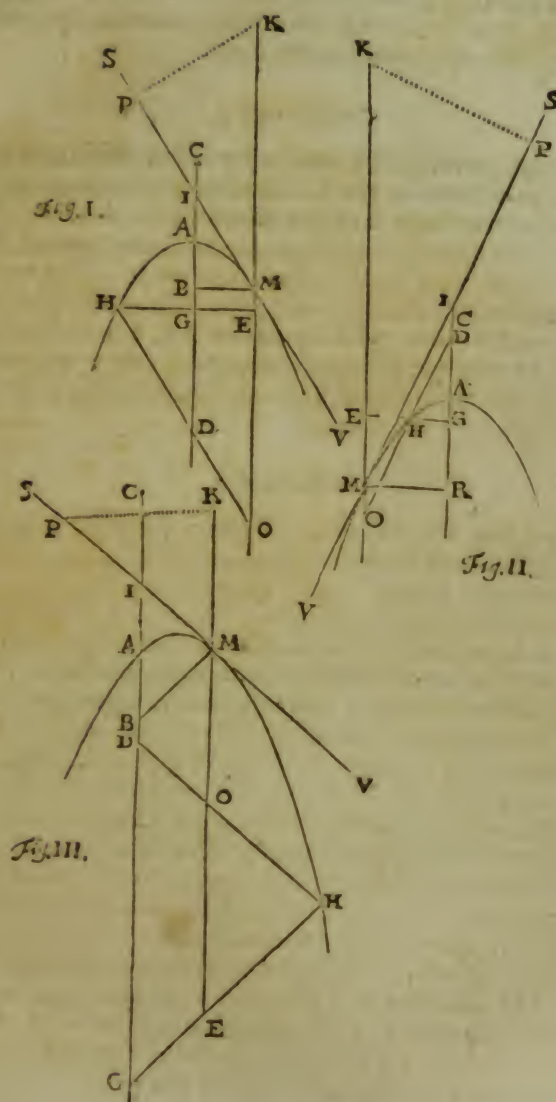
⁸ per 1 hu-
jus, & ex
hypothesi.
⁹ per 17
sexsi, & ex
hypothesi.
¹⁰ per 1 sex-
ti.
¹¹ per 4 &
22 sexsi.
¹² per 14
quinti.

Ideoque cum sit ut BM quadratum ad MI quadratum, sive ut
CAB rectangulum ⁸ ad rectangulum sub KM & AB ⁹, hoc est ¹⁰,
ut CA ad KM, seu, assumptâ communi altitudine MO, ut præ-
dictum rectangulum sub CA & MO ad KMO rectangulum,
ita ¹¹ EH quadratum ad HO quadratum; sitque rectangulum
sub CA & MO, ut jam ostensum est, æquale quadrato EH:
erit quoque ¹² rectangulum KM'O quadrato HO æquale.

Unde cum punctum H, ubicunque id in exposita Parabola
A H assumptum fuerit, semper quoque sit in Parabola, quæ effi-
ciente SV, intervallo verò MK describitur: sequitur alteram alte-
ri per omnia congruere, ideoque hanc cum illa eandem esse; ita
ut constet veritas eorum, quæ proponebantur.

Corollarium I.

Ex antedictis manifestum est, quòd, ductis in Parabola binis
quibuscumque rectis sibi invicem æquidistantibus, quæ utramque
bifariam dividit recta linea illius diameter existat. Quippe quæ
per medium æquidistantium unius diameter ducetur, sive hæc sit
ipsa diameter ex generatione, sive eidem parallela, per medium
quo-



¹ per con-
clusionem 6
Cor. 1 hujus.

quoque alterius æquidistantium transibit ¹. Atque ita apparet, quo pacto datæ cujuslibet Parabolæ diametrum simulque ordinatim ad eandem applicatas invenire liceat.

Corollarium 2.

Patetque porro, quaslibet rectas Parabolam ubivis contingentes, atque ordinatim à puncto contactus ad diametrum applicatas, æquales utrinque à vertice diametri portiones abscindere; & vice versâ à terminis applicatarum per diametrum ductas, ita ut æquales utrinque à vertice diametri portiones ductæ applicatæque abscindant, Parabolam in dictis terminis contingere. Rectam enim SV , ex eo quod æquales sint AI , AB , Parabolam in puncto M utcumque assumpto contingere, nunc ² demonstratum; at nec aliam rectam in puncto M Parabolam contingere posse, superius ³ ostensum est.

² in 2 hujus.

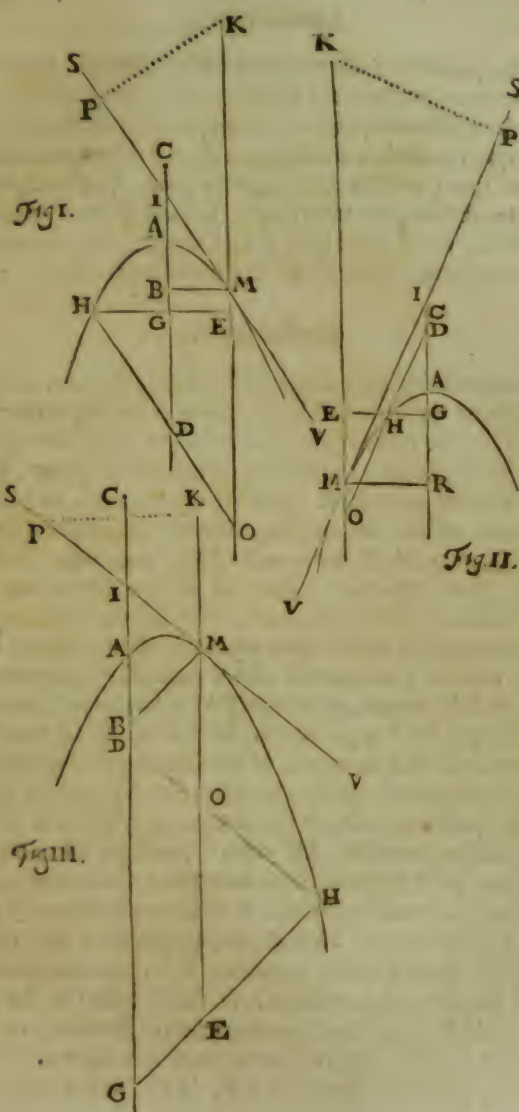
³ per 9 Cor. 1
hujus.

Corollarium 3.

Atque hinc non difficulter colligitur, quo pacto à quolibet puncto, non intra Parabolam dato, recta ducatur, quæ Parabolam contingat. Inventis enim ⁴ diametro quâcunque & rectis, quæ ad illam ordinatim applicantur, si in ejusdem diametri termino sit datum punctum, notum nunc est ⁵ rectam per idem punctum ductam, atque ordinatim applicatis æquidistantem, Parabolam ibidem contingere. At si alibi in curva sit punctum datum, veluti M , sitque inventa diameter AD : oportet, ductâ ex M rectâ MB ipsi AD applicatâ, sumptâque A ipsi AB æquali, ducere rectam per I & M . Sin autem extra curvam detur in diametro producta, veluti I : oportet, factâ AB ipsi AI æquali, atque BM ordinatim ad AD applicatâ, quæ Parabolæ occurrat in M , ducere rursus rectam per I & M . At verò si neque in curva neque in diametro producta detur, ut, si inventa diameter sit MO , datumque punctum I : oportet, ductâ ID diametro MO parallelâ, quæ Parabolam secet in A , sumptâque AB ipsi AI æquali, atque ex B ductâ BM ordinatim ad AD applicatâ, nimirum, quæ æquidistans sit contingenti in A , Parabolæque occurrat in M , ducere iterum rectam per I & M . quippe constat ex antedictis ⁶, ipsam IM omni casu Parabolam contingere in puncto M .

⁴ per 2 hujus, ejusque
Cor. 2.

Co-



Corollarium 4.

Constat præterea, assumptæ cujuslibet diametri parametrum esse tertiam proportionalem duabus rectis, quarum una est vel axis vel datæ diametri portio, intercepta inter ejusdem verticem & eam, quæ Parabolam in assumptæ diametri termino contingit, altera verò ea prædictæ contingentis pars, quæ inter datam & assumptam diametrum interjacet. Demonstratum enim est ¹, rectam MK, ex eo quòd ipsis AI, IM tertia sit proportionalis, assumptæ utcunque diametri MO parametrum esse.

Corollarium 5.

Ex demonstratis quoque non difficulter colligitur, quo pacto, datâ positione quâlibet Parabolæ diametro, ejusque vertice, & latere recto, nec non angulo, quem faciunt ordinatim ad dictam diametrum applicatæ, alia ejusdem Parabolæ diameter, quâcum applicatæ alium quemlibet angulum constituent, ac ipsius vertex, & latus rectum inveniantur. Si enim datâ positione diametro MO, vertice M, & latere recto MK, anguloque SMK vel VMK, quem applicatæ faciunt ad dictam diametrum MO, aliam ejusdem Parabolæ diametrum invenire oporteat, quâcum applicatæ angulum constituent æqualem dato cuilibet angulo ABM: ducatur à termino K ad SV recta KP in angulo KP V ipsi dato ABM æquali, divisâque PM bifariam in I ducatur per I recta IB ipsi MO æquidistans. Deinde ab M ad eandem IB applicetur recta MB in angulo MBI dato angulo æquali, divisâque BI bifariam in A, erit quæsita diameter AB, vertex punctum A, ejusque parameter AC, recta nempe, quæ ipsis AB, BM tertia proportionalis existit. Est enim ² punctum M in Parabola, quæ efficiente ipsi BM parallêlâ ac intervallo AC describitur, quandoquidem quadratum applicatæ BM ex constructione ³ rectangulo CAB est æquale. Deinde quoniam similia sunt triangula BIM & PMK, ob æquales angulos ad B & P (ex constructione), atque ad I & M ⁴ (ob parallêlas AD, MO), erit ⁵ ut BI ad IM, ita PM ad MK. & sumptis antecedentium dimidiis, ut AI ad IM, ita IM ad MK. Quare secundum ea quæ superius ⁶ demonstrata sunt, Parabolæ diametris AB, MO, ac parametris AC, MK,

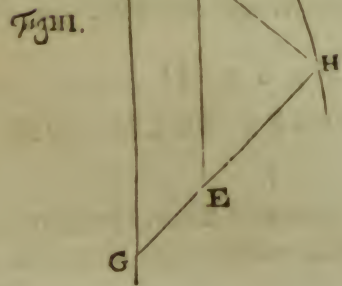
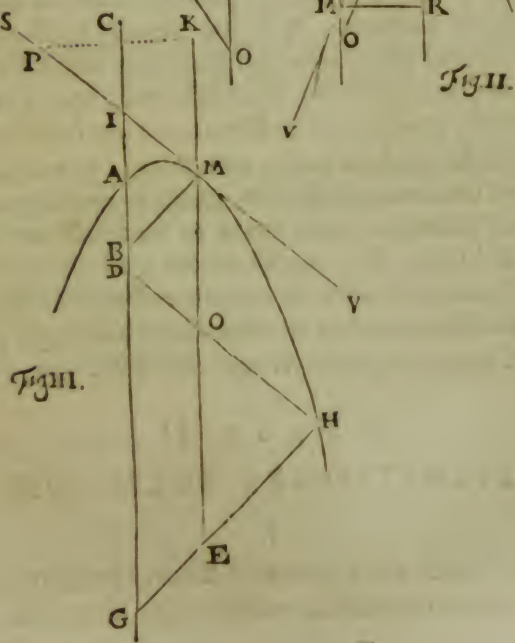
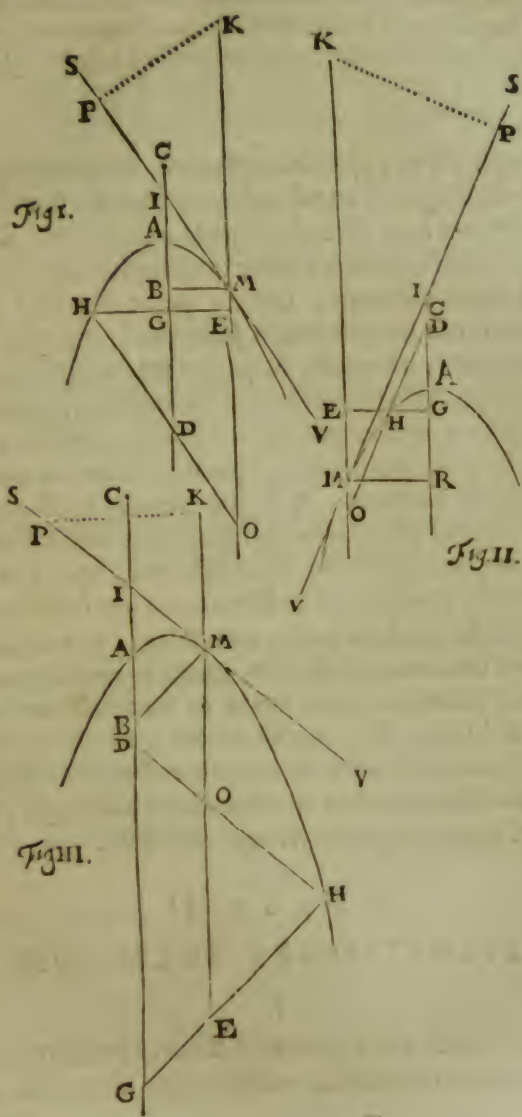
² per 1 hujus.

³ per 17 sexti.

⁴ per 29 primi.

⁵ per 4 sexti.

⁶ in 2 hujus.



MK, in dictis angulis descriptæ omnino eadem erunt. Sunt autem & anguli, quos faciunt MB aliæque ad diametrum AD applicatæ, ex constructione, dato angulo ABM æquales. Quocirca effectum est, quod quærebatur. Quod si verò datus angulus ABM rectus fuerit, ipse axis erit, inventa AD.

Etiam si curva, quâlibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descripta, si *anguli mobiles* inæquales sint iis, qui ad *directricem* sunt ab eadem parte, ea ipsa sit, cui post Circulum & Parabolam inter curvas primi generis primum locum tribuam, utpote quam sequenti specie quodammodo simpliciore iudicem; cuiusque propterea ortum, naturam, & proprietates nunc expositorum eidem describendi methodo insistere, præmissisque in principio definitionibus inharere possem; cum tamen ea ipsius proprietas, quam primam ac maximè universalem existimo, & è qua cæteras facillimè deduco, ex aliis generationum speciebus distinctius appareat atque expeditius demonstretur, quod in Mathematicis, & præcipuè in Elementorum explicatione non parvi faciendum puto, cam selegi, quæ à jam dicta quàm minimum deflectat, quæque similiter anguli rectilinei rectæque lineæ motu & intersectione perficitur; at in qua dicti anguli motus non circularis sed rectus, ac contra dictæ lineæ non rectus sed circularis est, ut ex definitionibus in eum finem adaptatis, & sequenti Capite propositis, magis clucescet.

C A P U T II.

DEFINITIONES SECUNDÆ.

I.

SI recta linea circa punctum fixum circulariter mota angulum quendam rectilineum, altero sui crure immo-

immo-
tam lineam promoveat, & secum ducat, ita ut prædi-
cta recta circulariter mota semper per idem applicati
cruris punctum transeat, simulque alterius cruris ac
ejusdem lineæ motæ intersectione curva describatur,
appellabitur hæc ipsa circulariter mota *linea describens*.

II.

Altera verò immota manens *Directricis* nomen reti-
nebit.

III.

Prædictus autem angulus rectilineus, isque qui ei est
deinceps, similiter & hic *Angulorum mobilium* nomine
venient.

IV.

Sicuti & punctum fixum, circa quod *describens* cir-
culariter movetur, *Polus* nuncupabitur.

V.

Rursusque crus *anguli mobilis*, quod à *describente* per
directricem promovetur, *Crus patiens*.

VI.

Alterum autem crus, quod à *describente* secatur,
Crus efficiens, & per anguli verticem productum *Linea*
efficiens appellabitur.

VII.

Cùm *describens efficiens* parallela est ac proinde nulla
ipsarum intersectio existit, tam *efficientem* quàm *descri-*
bentem in *statione prima* constitutas dicemus; ac quoties
de iis simpliciter sermo erit, in tali ipsas statione con-
siderabimus.

VIII.

Intervallum autem hic nominabimus tam eam *Cruris* *patientis* partem, quæ inter *anguli mobilis* verticem & *describentem* interjacet, quàm eam *describentis* portionem, quæ inter *Polum* & *directricem* intercipitur.

Ut in apposita figura, si recta ABC^a circa A punctum circulariter moveri concipiatur, motuque suo promovere & secum ducere angulum BEC^a ; ita ut crus EB semper applicatum maneat immotæ rectæ lineæ KL , ac prædicta ABC mobilis semper transeat per idem punctum cruris EB , ex. gr., per B , simulque alterius cruris EC & dictæ lineæ ABC intersectione C describatur curva lineæ cC , sitque ducta AD cruri EC parallela: apparet, quò magis recta ABC ad ipsam AD accedit, eò minorem fieri angulum ECB . ac tandem cum ipsa ABC pervenit ad AD , ita ut cum ipsa coïncidat, eundem angulum ECB tunc penitus evanescere: cum AD , ac proinde & dicta ABC , statione illâ, cruri EC parallela sit; ita ut tunc dictum crus EC sive recta CEM eadem sit cum lineæ GFH , nimirum suppositâ DF ipsi BE , æquali, eruntque

a quæ quidem recta ABC , ut & angulus BEC in figura quatuor distinctis stationibus exhibentur.

ABC describens in stationibus diversis.

KL directrix.

BEC , BEM , sive DFH & DFG anguli mobiles.

A Polus.

EB crus patiens.

EC crus efficiens.

MC lineæ efficiens.

GFH efficiens in statione prima, seu efficiens simpliciter.

ADI describens in statione prima, seu describens simpliciter.

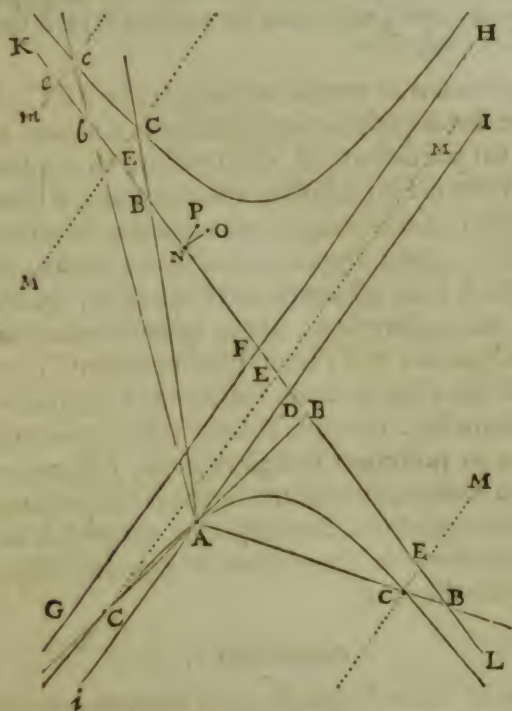
EB seu FD & AD utrumque intervallum.

THEOREMA III.

Propositio 3.

Quibuscumque *angulis mobilibus* ac quibuscumque *intervallis*, juxta definitiones præmissas descriptâ curvâ, hoc ipsi proprium erit, ut rectangulum contentum

tum sub qualibet recta *efficienti* parallelâ, à quocunque curvæ puncto ad *directricem* ductâ, atque eâ *directricis* parte, quæ inter dictam parallelam & *efficientem* interceptitur, æquale sit ei, quod sub utroque *intervallo* continetur, rectangulo.



Sit quolibet angulo mobili BEC, & quibuscunque intervallu EB, seu FD & AD, *directrice* KDL, descripta curva cC; ita ut *efficiens* sit GFH, sitque à puncto C in curva utcumque assumpto ad *directricem* ducta CE *efficienti* GFH, ac proinde & *intervallo* AD parallela: dico rectangulum FEC æquale esse ADF rectangulo, sive ei, quod sub AD, EB continetur.

Z 3

Con-

Constitutis enim tam *angulo mobili* quam *describente* in statione uti fuere, cum per ipsarum intersectionem descriptum est punctum C, veluti in BEC, & ABC, quoniam æquales sunt rectæ EB, FD, additâ vel ablatâ utrinque FB vel ED: erunt quæque rectæ BD, FE æquales; cumque ¹ propter parallelas EC, AD æquiangula sint triangula BDA, BEC: erit ² ut BD, id est, FE, ad DA, ita BE ad EC: ideoque ³ rectangulum FEC sub extremis æquale rectangulo sub mediis AD, EB seu ADF. Quod erat propositum.

¹ per 29 primi.
² per 4 sexti.
³ per 16 sexti.

⁴ in Epistola ad Schotennium.

Quare cum & omnia rectangula, ut FEC, inter se quoque sint æqualia, manifestum est, curvam, intersectione uti prædictum est, descriptam, eam ipsam esse, quam Veteres Hyperbolam vocarunt, aut, si binas curvas eodem & continuato motu genitas simul consideres, esse eas, quas Oppositas Sectiones dixere; *directricem* verò KL ac *efficientem* GH eas ipsas, quas Asymptotos nuncupaverunt, atque ipsarum occursum sive intersectionem, ut F, idem illud punctum, quod Hyperbolæ sive Oppositarum Sectionum Centrum ab ipsis appellatum fuit. ideoque & hæc singula iisdem illis nominibus in posterum indigitabimus, solummodo sectionum nomen, ob rationes superius ⁴ expositas, minùs congruum evitaturi. Rectangulum autem sub *intervallo* contentum, seu, quadratum ei æquale, Hyperbolæ Potentiam dicemus.

Corollarium I.

⁵ per 16 sexti.

Ex ipsa descriptione manifestum est, Asymptotos & Hyperbolam magis magisque ad se invicem continuè accedere, tandemque pervenire ad distantiam, datâ quâlibet distantia minore; cujus tamen, si demonstrationem exactiorem desideres, data distantia sit recta NO, ad Asymptoton FK perpendicularis. Sumptâ igitur NP, quæ eadem NO minor sit, si fiat ut NP ad AD, ita DF ad FE, ac per e ducatur ec ipsi NP æqualis atque Asymptoto FH æquidistans: erit ⁵ rectangulum Fec Potentiæ ADF æqua-

in uno tantum puncto, secare : quandoquidem hæ productæ ab utraque Asymptoto magis magisque semper abscedunt.

Corollarium 3.

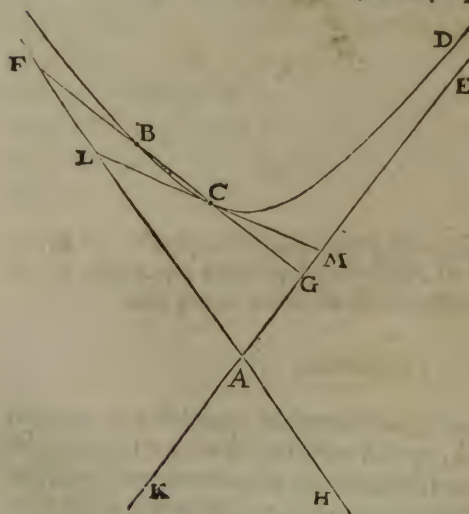
Constat præterea, *efficientem* in quacunque statione, id est, rectas omnes Asymptoto parallelas similiter Hyperbolæ, & quidem in uno tantum puncto, occurrere, productasque illam ibidem secare. Impossibile enim est, ut *describens* atque *efficiens* ullâ statione sese in pluribus punctis interfecent.

T H E O R E M A I V.

Propositio 4.

Recta linea, sive per bina quælibet in Hyperbola puncta transiens, sive eidem ita occurrens, ut producta utrinque extra Hyperbolam cadat, utrique Asymptoto, intra angulum, qui curvam continet, occurrit.

Sint in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti KAE, HAF,



ductæ FBCG, transiens per bina curvæ puncta B & C, atque MC eidem occurrens in C, ita ut producta versùs L utrinque extra Hyperbolam cadat ; Dico tam rectam FBCG quàm rectam MCL utrique Asymptoto KAE & HAF intra angulum EAF occurrere. Hoc enim si non accideret, eadem FBCG vel MCL aut Asym-

⁴ per 16 *sex-
ti.* ad G C, ita C M ad B L, id est, ita C H ad B F. ac proinde ⁴ re-
ctangula E B F & G C H æqualia sunt. Quod demonst-
randum erat.

Eodem modo ostendetur, si per bina puncta, ut B & D, una recta ducatur B D, quæ utrique Asymptoto oc-
currat in punctis E & F ⁴, rectangula E B F, F D E sibi
invicem æqualia esse.

Corollarium 1.

In oppositis Hyperbolis, si parallelarum altera per centrum
transeat, ut C P in tertia figura, eadem demonstratione compro-
batum erit, rectangula sub partibus quarumlibet rectarum, quæ
per Asymptotos ad utramque curvam ducuntur, singula æqua-
lia esse quadrato æquidistantis à centro ad Hyperbolam ductæ.
Quare cum ex dictis appareat, si, ductâ per centrum rectâ ut-
cunque veluti C G P in eadem figura, eidem ubivis alia recta æ-
quidistans ducatur B D, quæ secet Asymptotos in E & F, rectan-
gulum E B F vel F D E quadrato G C itemque & G P quadrato
æquale esse: sequitur, ipsas quoque G C, G P esse sibi invicem
æquales, hoc est, quamlibet rectam ad oppositas Hyperbolas
per centrum ductam, in eodem centro bifariam secari.

Corollarium 2.

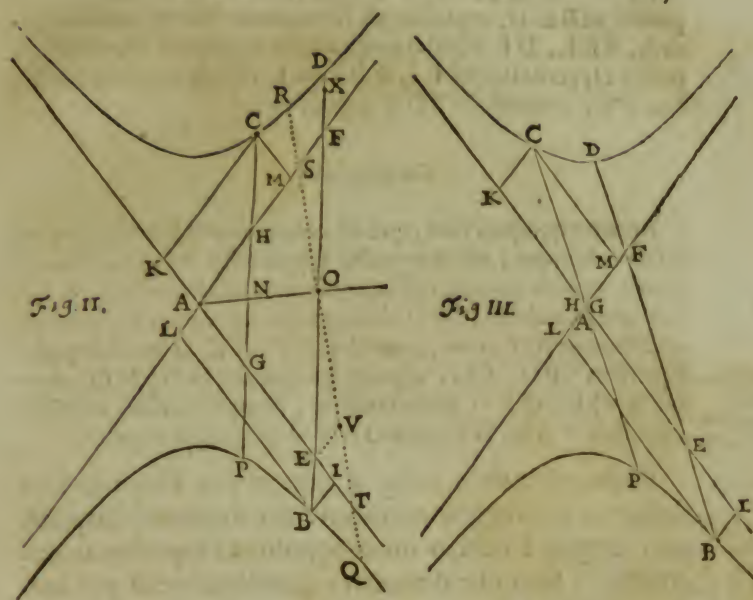
Constat quoque cujuslibet rectæ, sive per unam eandemque,
sive per oppositas Hyperbolas ductæ, partes Hyperbolâ & A-
symptotis interceptas sibi invicem esse æquales.

⁵ per 5 *hu-
jus, & 16
sexti.*
⁶ per 17
Quinti.
⁷ per 18
Quinti.
⁸ per 9
Quinti.

Ductâ enim utcunque B D, quæ Asymptotis occurrat in E &
F, cum ex antedictis ⁵ B F sit ad D F, ut D E ad B E: erit quoque
dividendo ⁶, vel, in oppositis Hyperbolis, componendo ⁷, B D
ad D F, ut eadem B D ad B E, ideoque D F, B E ⁸, ac proinde &
B F, D E sibi invicem æquales erunt.

Corollarium 3.

Unde pariter constat, rectam, quæ vel unius ejusdemque, vel
oppositarum Hyperbolarum, bina puncta conjungit, nullo alio
sui



fui puncto in Hyperbola esse. Si enim præter D & B aliud quoddam ipsius D B punctum, ex. gr. X, in Hyperbola foret, esset ¹ per Coroll. X F ipsi B E ac proinde & ipsi D F æqualis, pars toti, quod est absurdum. ^{præced.}

Corollarium 4.

Facile autem apparet, & conversum quoque propositionis verum esse: nempe, si, iisdem positis, & rectangulis E B F, G C H æqualibus, punctorum B & C unum in Hyperbola sit, & alterum quoque fore in eadem vel opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E & A F. Ex eo enim quod æqualia sint rectangula E B F & G C H demonstrabitur æqualia quoque esse rectangula A I B & A K C eadem methodo, quâ conversum supra ostensum fuit. ideoque si punctum B sit in Hyperbola, erit quoque ² punctum ^{per 3. lxx.} C in eadem aut in opposita Hyperbola, cujus Asymptoti sunt A E, ^{ius.} A F, & vice versâ. De binis autem punctis in eadem linea, ut B & D, idem dictum esto; imò & idem erit in eadem linea, si dicta puncta

A a 2

puncta

puncta, ut B & D, æqualiter ab Asymptotis distent: quandoquidem, si BE, DF æquales sunt, additâ utrinque BD, vel in oppositis Hyperbolis ipsâ EF, & BF ipsi DE, ideoque & rectangulum EBF rectangulo FDE æquale crit.

Corollarium 5.

Apparet quoque, eam, quæ ex centro quamlibet rectam, vel in una eademque, vel in oppositis Hyperbolis ductam, bifariam dividit, omnes quoque ipsi æquidistantes bifariam dividere. Ut, si ex centro A ducta ANO dividat bifariam rectam CP, cui æquidistans sit BD; cum, æqualibus NP, NC additis demptisvè

¹ per 2 Cor.
² hujus.

³ per 9 quin-
ti, & 4 sex-
ti.

⁴ per 2 Cor.
⁵ hujus.

⁶ ut AO si-
mileque in
I figura.

⁷ ut AO si-
mileque in
II figura.

⁸ ut FC, DB
in utraque
figura.

⁹ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁰ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹¹ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹² ut FC, DB
in utraque
figura.

¹³ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁴ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁵ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁶ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁷ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁸ ut FC, DB
in utraque
figura.

¹⁹ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁰ ut FC, DB
in utraque
figura.

²¹ ut FC, DB
in utraque
figura.

²² ut FC, DB
in utraque
figura.

²³ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁴ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁵ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁶ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁷ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁸ ut FC, DB
in utraque
figura.

²⁹ ut FC, DB
in utraque
figura.

³⁰ ut FC, DB
in utraque
figura.

³¹ ut FC, DB
in utraque
figura.

³² ut FC, DB
in utraque
figura.

³³ ut FC, DB
in utraque
figura.

³⁴ ut FC, DB
in utraque
figura.

³⁵ ut FC, DB
in utraque
figura.

Ejusmodi autem rectæ à centro per Hyperbolam ductæ ^a, interceptæ diametri, seu diametri simplici-
ter; at quæ à centro inter oppositas Hyperbolas du-
cuntur ^b, secundæ diametri; parallelæ verò per eas-
dem bifariam sectæ ^c, ordinatim ad diametros appli-
catæ vocantur; & si applicatæ ad angulos rectos à dia-
metris secantur, eadem diametri Hyperbolæ axes ap-
pellantur. Quando autem secunda diameter ordina-
tim ad interceptam diametrum applicatis parallela est,
altera alteri *Conjugata* dicitur.

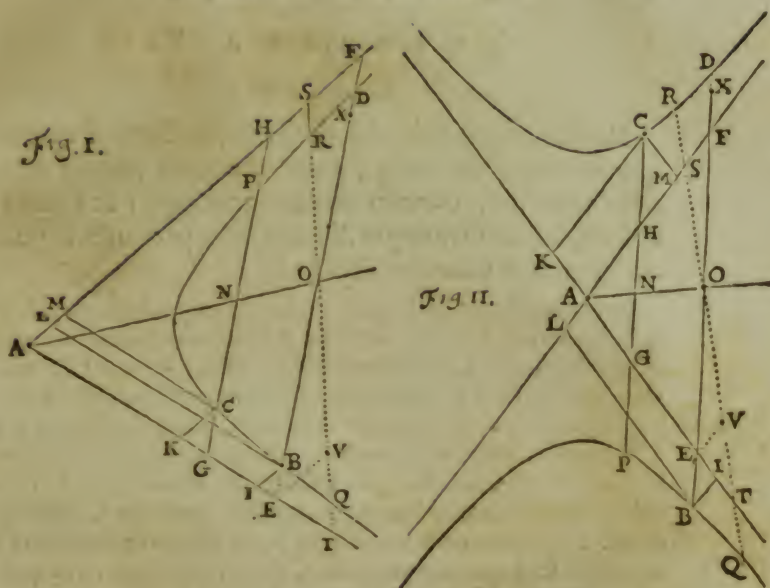
Corollarium 6.

Ex præmissis colligitur, non posse alias rectas, quàm dictas
parallelas seu ordinatim applicatas, à diametro bifariam seca-
ri. Si enim fieri possit, secetur à diametro AO bifariam præ-
ter applicatas alia recta, ut QR, Asymptotis occurrens in S
& T; & sit per O ordinatim applicata BOD, Asymptotis oc-
currens in E & F. Æquales ergo erunt tam EO, FO ⁴, quàm
TO, SO ⁵. Quoniam verò, ductâ EV ipsi SF parallelâ ⁶,
æqui-

⁴ per 2, & 5
Cor. 5. hujus.

⁵ ex hypot. ⁶
juncto Cor. 5.

⁷ hujus. ⁸ per 15 & 29 Primi.



\propto quiangula sunt triangula EOV & FOS : erit \propto ut EO ad OV , ita FO ad OS . Quare cum EO ipsi FO sit \propto qualis, erit & OV ipsi OS , hoc est, recta OT \propto qualis, pars tota, quod est absurdum. Non ergo bifariam secatur recta RQ a diametro AO .

Corollarium 7.

Atque hinc manifestum fit, quod, si vel in una eademque vel ad oppositas Hyperbolas binæ quælibet rectæ sibi invicem \propto quidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividit recta linea per centrum transeat seu diameter sit: Quippe quæ per medium unius \propto quidistantium diameter ducetur, per medium quoque alterius \propto quidistantium transibit. Unde apparet, quo pacto datæ Hyperbolæ vel oppositarum Hyperbolarum diametros quotlibet, simulque ordinatim applicatas ad easdem, nec non & centrum, utpote quod binarum pluriumve diametrorum communis intersectio est, reperire liceat.

Aa 3

THEO-

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Recta per quodlibet Hyperbolæ punctum ad utramque Asymptoton ducta, quæ in eodem puncto bifariam dividitur, curvam ibidem contingit; & contra, contingens ad utramque Asymptoton producta in puncto contactus bifariam divisâ est.

Sit per punctum C in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta recta GCH, utrinque Asymptotis terminata, quæ in eodem puncto C bifariam dividatur. Dico rectam GH curvam contingere in C. Secet enim, si fieri potest, recta GH Hyperbolam in C & I: eritque ¹ IH rectæ CG, ideoque & ipsi CH æqualis. quod est absurdum. Non secat ergo GH Hyperbolam, sed eandem contingit. Dico porro conversum, si GH in puncto C Hyperbolam contingat, eandem quoque in C bifariam dividi. Hoc enim si non sit, sumatur in CH majori parte ipsa HI æqualis GC. Hinc cum punctum C sit in Hyperbola, erit quoque ² punctum I in Hyperbola, totaque CI ³ intra curvam cadet, ideoque ipsa GH Hyperbolam non continget, sed eandem in punctis C & I secabit, contra id quod ponebatur. Non ergo GC ipsi CH inæqualis est. Ideoque casu utroque constat propositum.

¹ per 2 Cor.
⁵ hujus.

² per 4 Cor.
⁵ hujus.

³ per 3 Cor.
⁵ hujus.

Corollarium I.

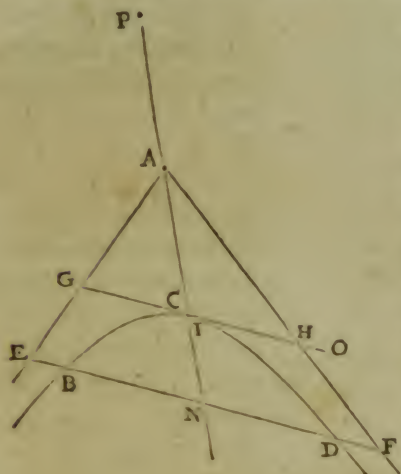
Manifestum itaque est ex antedictis, singula rectangula, quæ comprehenduntur sub partibus cujuslibet rectæ contingenti parallelæ, inter Hyperbolam & Asymptotos interceptis, esse æqualia dimidiæ tangentis quadrato. Ut, si tangenti GCH æquidistans utcumque ducta sit BD, Asymptotis occurrens in E & F: erit rectangulum EBF five ⁴ BFD, ut & FDE five DEB æquale rectangulo GCH ⁵, id est, ipsius CH vel CG, dimidiæ tangentis quadrato.

⁴ per 2 Cor.
⁵ hujus.
⁵ per 5 hujus.

Co-

Corollarium 2.

Pater porrò, rectam, quæ per diametri terminum ducitur æquidistans ei, quæ in Hyperbola ab eadem diametro bifariam secatur, id est, ordinatim applicatis parallela, Hyperbolam in dicto termino contingere. Ut, si ad



diametrum AN ordinatim applicata sit BND, quæ producta Asymptotis occurrat in E & F, ac per diametri terminum C ducta sit recta GCH, ipsi BND æquidistans, cum æquales sint NF & NE¹: erunt quoque CH & CG æquales, ideoque GCH Hyperbolam continget in C.

¹ per 2 & 5
Corol. 5 hujus.
² per 9 quinti, & 4
sexti.
³ per 6 hujus.

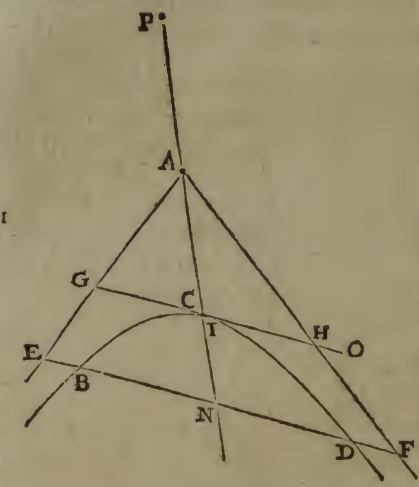
Corollarium 3.

Hinc liquet, non solum omnes rectas in Hyperbola, contingenti parallelas, à diametro per tactum ducta bifariam secari, ideoque ad eam ordinatim applicatas esse, sed & non posse plures rectas in uno eodemque puncto Hyperbolam contingere. Ut, si contingenti GH parallela sit BD, Asymptotis occurrens in E & F, ducta per tactum C diametro ACN, quæ ducta BD occurrat in N: quoniam GC, CH æquales sunt, nec non EN, NF⁴, erunt quoque (demptis æqualibus⁶ EB, DF,) BN, ND æquales, ideoque & ad dictam diametrum ACN ordinatim applicata. At verò non posse aliam rectam præter GH Hyperbolam in puncto C contingere, patet, quandoquidem & omnes ipsi æquidistantes in Hyperbola ductæ, quæque aliæ essent quàm prædictæ applicatæ, bifariam quoque per eandem diametrum dividerentur⁷. quod fieri non posse superius⁸ ostensum est.

⁴ per 6 hujus.
⁵ per 9 quinti & 4
sexti.
⁶ per 2 Cor. 5 hujus.
⁷ per supra demonstrata.
⁸ in Cor. 6 Cæ- 5 hujus.

Caterum monendum hîc, ut diametrorum quoque magnitudo determinetur, eam, quæ à quocunque

in Hyperbola puncto per centrum ducta oppositâ Hyperbolâ terminatur, ideoque interceptæ inter centrum & curvam dupla est¹, ut CAP, vel Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum transversam diametrum; eamque, quæ in ipsius termino curvam continens utrinque Asymptotis terminatur, aut quæ ipsi per



¹ per Corol. 1
5 hujus.

centrum æqualis & parallela ducitur, ut GCH, secundam diametrum transversæ conjugatam; at verò illam, quæ ipsis PC, GH, transversæ nempe secundæque diametro tertia est proportionalis, ut CO, rectum latus sive Parametrum dici.

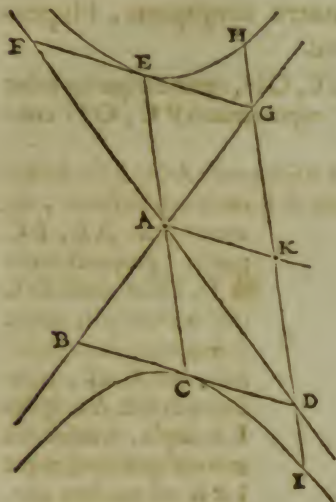
THEOREMA VII.

Propositio 7.

Quæ per terminum transversæ cujuslibet diametri recta ducitur, contingenti in vertice parallela, oppositam Hyperbolam contingit, & quæ ad secundam diametrum, assumptæ cuicunque diametro conjugatam, ordinatim applicatur, eidem assumptæ diametro æquidistat.

Sit

Sit Hyperbolæ, vel oppositarum Hyperbolarum IC, HE, quarum Asymptoti BG, DF, diameter transversa utcunque assumpta CE, perque ejus terminum E ducta recta FEG parallela ipsi BD, quæ curvam in vertice C contingit, ita ut hæc atque illa Asymptotis occurrant in punctis B, D & F, G: dico prædictam quoque FEG oppositam Hyperbolam contingere in E; & si per centrum A ducatur secunda diameter AK, diametro CE conjugata, ordinatim ad eandem AK applicatas ipsi CE diametro æquidistare.



Quoniam enim est ¹ tam AE ad EG, ut AC ad CB, quàm AE ad EF, ut AC ad CD; & sunt tam AE, AC quàm CB, CD æquales, erit quoque ² tam EG ipsi CB, quàm EF ipsi CD, ac proinde & EG ipsi EF æqualis. Unde ³ recta FG oppositam Hyperbolam HE continget in puncto E. Quod primo loco propositum fuit. Porro si per G & D ducatur recta GD, secans secundam diametrum AK in K, oppositisque Hyperbolis occurrens in H & I, cum æquales & parallelæ sint EG, CD, erunt & ⁴ quæ ipsas conjungunt GD, CE parallelæ & æquales. Ideoque cum secunda diameter AK contingentibus BD, FG, id est ⁵ ordinatim ad diametrum CE applicatis æquidistans sit, utpote ex Hypothesi ipsi CE conjugata: erunt quoque ⁶ rectæ GK, EA, ut & KD, AC, ideoque & ⁷ GK, KD æquales. Quibus si addantur æquales ⁸ GH, DI: erunt similiter rectæ KH, KI sibi invicem æquales. Quocirca cum ⁹ ad secundam diametrum AK applicata sit recta HI, etiam cæteræ omnes ad eandem applicatæ ¹⁰ eidem HI ac proinde & diametro CE æquidistabunt. Quod secundo loco propositum erat.

¹ per 29 primi, & 4 sexti.

² per 1 Corol. 5 hujus. ³ per 6 hujus.

⁴ per 14 quinti. ⁵ per 6 hujus.

⁶ per 33 primi.

⁷ per 3 Corol. 6 hujus.

⁸ per 34 primi.

⁹ per 1 Corol. 5 hujus.

¹⁰ per 2 Corol. 5 hujus.

¹¹ per 6 Corol. 5 hujus.

¹² per 5 & 6 Corol. 5 hujus.

Bb

PRO-

PROBLEMA I.

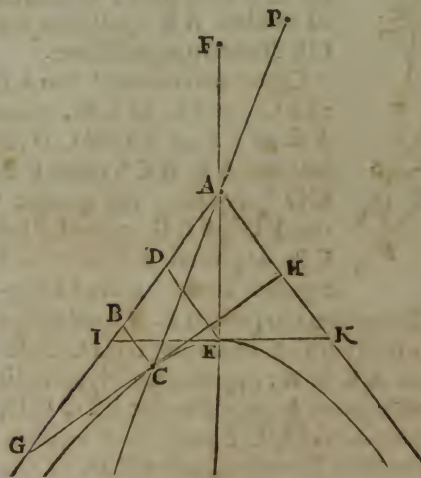
Propositio 8.

Datis quibuscunque diametris conjugatis, Hyperbolæ axes conjugatos invenire.

Sint datæ diametri conjugatæ PC , GH , oporteatque invenire conjugatos axes ejus Hyperbolæ, cujus eadem PC , GH conjugatæ diametri existunt.

Ductis ab A centro per G & H Asymptotis AG , AH , ductâque à C ad eorum alterutram rectâ CB alteri æquidistante, sumatur inter AB , BC media proportionalis AD . Dein ductâ DE ipsi AD æquali, atque Asymptoto AH parallêlâ, erit EAF , transiens per E & A ac ipsius EA dupla, transversus axis qui quæritur, atque IEK ad eandem perpendicularis, ac utrinque Asymptotis terminata, axis secundus, priori conjugatus.

Quoniam enim punctum C in Hyperbola est, rectangulumque



¹ ex hypothesi.

² per 17 sexti.

³ per 3 huius.

⁴ per 5 primi.

⁵ per 29 primi.

⁶ per 32 primi.

⁷ per 26 primi.

⁸ per sup. demonstr.

⁹ per 6 huius.

ADE ipsi ABC æquale ²; erit quoque punctum E ³ in Hyperbola. Porro cum propter rectas DA , DE æquales ⁴ æqualis quoque sit DAE angulus ipsi DEA , id est ⁵, EAK angulo, sintque & anguli AEI , AEK ex constructione æquales: erunt ⁶ triangula AEI , AEK æquiangula, atque ob latus AE commune ⁷ etiam æqualia, latusque IE lateri EK æquale. Unde cum punctum E ⁸ in Hyperbola existat, dividatque bifariam rectam IK , utrinque Asymptotis terminatam, continget ipsa IK ⁹ curvam in E ; ideoque, & propter angulos FEI , FEK rectos, conjugati axes erunt FE , IK .

THEO-

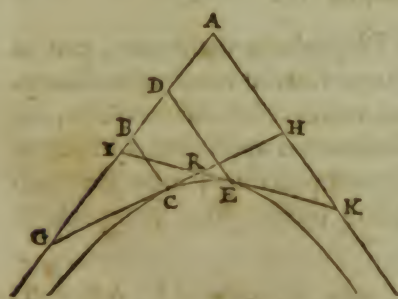
THEOREMA VIII.

Propositio 9.

Quælibet contingentes ab angulo Hyperbolæ A-
symptotis comprehenso æqualia abscindunt triangula,
& rectangula sub eorundem triangulorum lateribus
comprehensa invicem quoque æqualia sunt, ac præ-
terea majora eorundem latera à contingentibus, ipsæ-
que bases seu contingentes Asymptotis terminatæ, in
mutuo occurſu, nec non ipſarum partes curvam con-
tingentes inter occurſum & Asymptotos interjectæ, in
punctis contactus, in eadem ratione ſecantur.

Hyperbolam CE, cujus Asymptoti AG, AK, rectæ GH,
IK utrinque Asymptotis terminatæ, ac ſibi mutuò in R occur-
rentes, contingant in punctis C & E: dico tam rectangula quàm
triangula GAH, IAK æqualia eſſe; ac præterea eſſe GI ad IA,
ſicut KH ad HA; itemque GR ad RH, ſicut KR ad RI; nec
non GC ad CR, ſicut KE ad ER.

Ductis enim à punctis contactus C & E rectis CB, ED Asym-
ptotorum alterutri, ut AH, parallelis, cum ſit ut GC ad GH,
ita GB ad GA, & BC ad AH¹; ſitque GH ipſius GC dupla²; ^{1 per 4 ſexti.}



erit quoque tam GA³ ^{2 per 6 huius.}
ipſius GB quàm AH⁴.
ipſius BC dupla, id-
eoque⁵ rectangulum⁶ ^{1 per 20}
GAH rectanguli GBC^{ſexti.}
ſive ABC quadruplum.
Eodem modo rectangu-
lum IAK rectanguli
ADE quadruplum o-
ſtendetur. Hinc cum æ-
qualia ſint rectangula

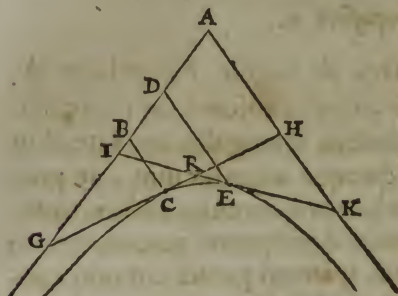
ABC, ADE⁷, erunt quoque eorum quadrupla, nimirum re-^{4 per 3 huius.}
ctangula GAH & IAK æqualia. Quod eſt primum.

Unde cum⁸ ſit ut GA ad AK, ita IA ad AH, triangula quo-^{8 per 16}
que^{ſexti.}

Bb 2

⁶ per 15
sexii.⁷ per 16
quinti.⁸ per 17
quinti.

que GAH, IAK æqualia erunt ⁶, utpote habentia latera circa communem angulum, reciproca. Quod est secundum.



Ac cum permutando ⁷ quoque sit GA ad IA, ut AK ad AH: erit & ⁸ dividendo GI ad IA, ut KH ad HA. Quod est tertium.

Porrò cum ab æqualibus triangulis GAH, IAK ablato communi quadrilatero IRHA, residua, nempe triangu-

⁹ per 15
sexii.¹⁰ per 13
quinti.¹¹ per Co-
roll. 19
quinti.

la GRI & KRH, quoque æqualia remaneant, erunt ⁹ eorundem latera circa æqualem angulum ad R reciproca, id est, erit GR ad RH, ut KR ad RI. Quod est quartum.

Unde cum componendo ¹⁰ quoque sit GH ad RH, ut KI ad RI, aut, sumptis antecedentium dimidiis, CH ad HR, ut EI ad IR: erit & per conversionem rationis ¹¹ CH sive GC ad CR, ut EI sive KE ad ER. Quod est quintum. Atque ita demonstrata sunt ea, quæ proponebantur.

THEOREMA IX.

Propositio 10.

Ductâ quacunque in Hyperbola diametro, erit ut quadratum secundæ ad quadratum transversæ diametri, sive ut parameter ad transversam diametrum, ita quadratum cujuslibet ordinatim applicatæ ad rectangulum sub ejusdem diametri partibus, utroque transversæ termino & applicatâ interceptis, comprehensum.

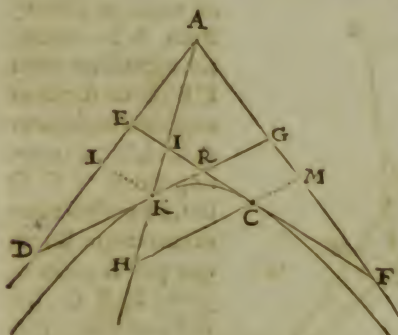
Sit in Hyperbola BCD, cujus Asymptoti AE, AF, ducta diameter utcunque PACN, cujus secunda diameter transversæ PC conjugata sit GCH, parameter verò CI, ipsis nempe PC, GH tertia proportionalis, & sit ordinatim ad dictam diametrum appli-

THEOREMA X.

Propositio II.

Si quælibet contingens cuicunque Hyperbolæ diametro occurrat, atque à puncto contactus recta ad eandem diametrum ordinatim applicetur, erit rectangulum sub diametri portionibus à centro per contingentem applicatamque abscissis æquale semidiametri transversæ quadrato.

Quamcunque Hyperbolam KC , cujus Asymptoti AD , AF , contingat in puncto C utcunque sumpto recta ECF , Asymptotis occurrens in E & F , diametro autem AH utcunque ductæ



in I ; & per punctum contactus C ad eandem diametrum ordinatim applicata sit CH , quæ producta Asymptoto occurrat in M . Dico rectangulum $HA I$ æquale fore quadrato semidiametri KA , sive, quod idem est ¹, continuè ¹ per ¹⁷ proportionales esse HA , ^{sexi.} KA , & IA .

Ductis enim DKG applicatæ CH , & KL

contingenti FE parallelis, notatoque intersectionis puncto R , cum sit ¹ RC ad CF , ut RK ad KD , hoc est ¹, MG ad MF , ² per ² Cor. ut LE ad LD : erit quoque ⁴ MG ad GF , ut LE ad ED . Quare cum porro ⁵ sit FG ad GA , ut DE ad EA : erit ⁶ ex æquo ³ per ² sexti. MG ad GA , id est ⁷, HK ad KA , ut LE ad EA , hoc est ⁸, ut ⁴ per compositionem rationis contrariam, KI ad IA : & ⁹ componendo HA ad KA , ut KA ad IA . Quod demonstrandum erat.

¹ium ad 18 Quinti. ² per 9 hujus. ³ per 22 Quinti. ⁴ per 2 sexti. ⁵ per 2 sexti. ⁶ per 18 Quinti.

THEO-

seu ¹ ad T M C rectangulum, ut H A seu C B ad I A, id est ², ut ¹ per 1 Cor.
 B Q ad A Q; erit dividendo ³ H C quadratum seu B A quadra- ⁶ huius.
 tum ad K G quadratum, ut B A ad A Q. Ac propterea ⁴ B A, ³ per 4 sexti.
 K G, & A Q proportionales erunt, rectangulumque B A Q ⁵ qua- ³ per 17
 drato K G æquale. Quod demonstrandum erat. ^{Quinti.}
⁴ per Cor. 20
⁵ sexti.
³ per 17
⁵ sexti.

Corollarium ad duas propositiones præcedentes.

Ex dictis facillimè colligitur, quo pacto à dato quolibet puncto
 ducenda sit recta, quæ datam Hyperbolam contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti K, inventis A- ⁶ per 1 Cor.
 symptotis ⁶, ductâque ad illarum alterutram rectâ alteri Asympto- ¹⁰ huius.
 to parallelâ, ut K P, ac sumptâ P G ipsi A P æquali, continget jun- ⁷ per 6 huius.
 cta G K D Hyperbolam in K ⁷. quoniam uti G P ipsi P A, ita G K ⁸ per 2 sexti.
 ipsi K D æqualis est ⁸.

Eodem modo, si datum punctum sit in Asymptotorum alteru- ⁹ per 2 Cor.
 tra, veluti G, divisâ A G bifariam in P, ductâque P K alteri Asym- ³ huius.
 ptoto parallelâ, quæ curvæ occurrat ⁹ in K: continget juncta ¹⁰ per 2
 G K D ¹⁰ Hyperbolam in puncto occursum K. ^{sexti, & 6}

Sit deinde datum punctum intra angulum Asymptotis compre- ¹¹ huius.
 hensum, veluti I: ductâ à centro ¹¹ per I diametro, ut A I H, quæ ¹¹ invento
 curvæ occurrat in K, sumptâque A H ipsi A I, A K tertiâ propor- ^{per 7 Corol.}
 tionali, si per H agatur ordinatim applicata H C (nimirum, quæ ⁵ huius.
 contingenti in K æquidistet ¹²), occurrens curvæ in C, continget ¹² per 3 Cor.
 juncta I C ¹² Hyperbolam in eodem C puncto. ⁶ huius.
¹³ per 11

Sit denique datum punctum in alterutro angulorum, qui dein- ¹⁴ per 7 huius.
 cepti sunt, angulo Hyperbolam continenti, veluti Q: ductâ per Q ¹⁵ per 12
 & centrum A secundâ diametro Q A B, transversâque ipsi conju- ^{huius.}
 gatâ A K H (nimirum, quæ producta quamlibet rectam in Hyper-
 bola ductam ipsi Q A B æquidistantem bifariam dividat), nec
 non tangente K G vel K D, Asymptoto terminatâ; si fiat quadrato
 K G vel K D æquale rectangulum Q A B, ac per B ad secundam
 diametrum A H applicetur recta B C, nempe ipsi A K æquidi-
 stans ¹⁴, quæ curvæ occurrat in C: juncta Q C ¹⁵ in eodem pun-
 cto C Hyperbolam continget. ¹⁶ juxta 1
^{Cor. 3 huius.}

Manifestum porrò est, si datum punctum vel intra Hyperbo-
 lam foret, vel intra angulum ad verticem ei, qui Hyperbolam
 continet: fieri non posse ¹⁶, ut ab eodem puncto ducatur recta,
 quæ producta eandem non secet. ¹⁶ juxta 1
^{Cor. 3 huius.}

C c

C A -

CAPUT III.

DEFINITIONES TERTIÆ.

I.

SI quodlibet trianguli rectanguli latus, sive id rectum angulum subtendat, sive acutorum alterutri oppositum sit, in eodem angulo moveatur, ita ut uterque moti lateris terminus semper existat, maneatque in latere, cui ab initio junctus fuit, producto tamen sive ab altera sive ab utraque parte, prout opus fuerit; idemque ille motus tam per angulos, qui præfato deinceps sunt, quam per eum, qui ipsi ad verticem est, ordine continetur, donec ad positionem situmque pristinum latus motum redierit, atque ita quolibet puncto quod in eodem, utcunque etiam producto, notare placuerit, curva describatur linea, prædictum mobile latus *Describentis Lineæ* nomine designabitur.

II.

Punctum autem quod in eodem ad descriptionem notare placuerit, *Punctum Efficiens*, aut *Punctum* simpliciter vocabitur.

III.

Distantia verò ejusdem puncti tam ab uno quam ab altero *describentis* termino *Intervallum* dicetur.

IV.

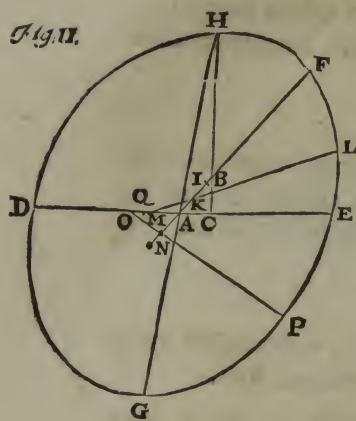
Cum de *angulo* simpliciter sermo erit, cum intelligemus, quem subtendit, & in quo movetur *describens*.

V.

Anguli vertex, quem *describens* continuato motu quasi circumambulat, *Centrum* appellabitur.

VI.

H curvæ portio HF: deinde puncto C promoti per A ad M, simulque termino B retrogresso vel progresso ab I ad K, ita ut H



pervenerit ad L, descriptus sit arcus FL: eodemque modo, ubi punctum B per K continuato motu pervenerit ad A, simulque punctum C per M progrediendo pervenerit ad Q, ac punctum H in E incidit, descriptus sit arcus LE: ac rursus ubi punctum B per A progressum fuerit ad N, simulque punctum C ex Q vel retrocesserit vel progressum sit ad O, ita ut tunc punctum H pervenerit ad P, descriptus sit arcus EP: atque si porro eodem pacto motus ille continuetur, donec prædictum punctum per G & D transierit rursusque ad H pervenerit, descripta sit tota curva HFLEPGD: erunt

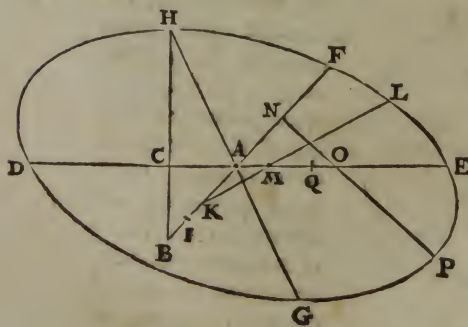
BC, quæ & in aliis stationibus est IA, KM, AQ, NO, &c. *linea describens.*

H punctum efficiens.

HC & HB utrumque intervallum.

Anguli vertex, nempe punctum A, *Centrum.*

Fig. III.



Et si alterutrum *anguli* crus, exempli gratiâ, AC, utrinque, si opus fuerit, productum sit, veluti ad D & E; ita nempe, ut tam AD quàm AE æqualis sit rectæ HB, *intervallo* videlicet, quod in altero crure terminatur, tota DE *directrix* erit.

Cum autem *describens* BC eidem *directrici* DE est perpendicularis, quod quidem fit, quando ipsa positione eadem est cum crure AB, uti AI, *angulo* nempe existente recto, ut in

ut in prima figura, aut si obliquus fuerit *angulus*, in ipsa positione B C, uti exhibetur in sequentibus figuris, erit I A, casu primo, & B C, casu altero, *describens in statione prima seu describens simpliciter*, ideoque punctum F vel H, quod eidem in directum est, punctum efficiens in statione prima seu punctum simpliciter.

Ac proinde F A G^a vel H A G^b, nempe ab eodem puncto per centrum A ducta atque ipsius F A sive H A dupla, *secantem* repræsentat.

^a in casu
fig. I & si
milib.
^b in casu
fig. II &
III ac si
milib.

THEOREMA XII.

Propositio 13.

In quocunque *angulo*, & quibuscunque *intervallis*, juxta definitiones hoc capite propositas, curvâ descriptâ, hoc ipsi proprium erit, ut quadratum cujuslibet *secanti* æquidistantis, à quolibet *directricis* puncto ad curvam applicatæ, eandem rationem habeat ad rectangulum sub partibus *directricis* per applicatam factis, quam quadratum *secantis* ad quadratum *directricis*.

Sit in quocunque *angulo* B A C, *intervallu* quibuscunque H C, H B, descripta curva D H E G, cujus *directrix* D A E, *secans* F A G^a vel H A G^b; atque à puncto I in *directrice* D E utcunque assumpto, ad curvam applicata I L *secanti* F A G^a vel H A G^b æquidistans: dico fore quadratum applicatæ L I ad rectangulum D I E, ut est quadratum *Secantis* F G^a vel H G^b ad quadratum *directricis* D E.

^a in casib.
fig. I, II, &
similibus.
^b in casib.
exteriorum
fig. & simi-
libus.

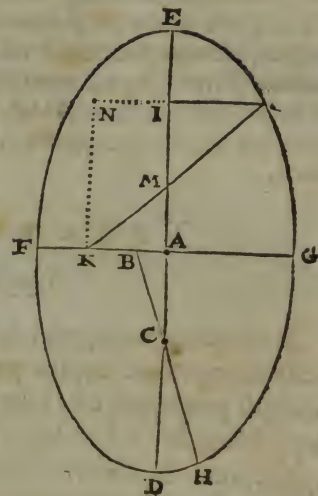
Sit enim recta K M *describens* in ea statione, uti fuit, cum per eandem descriptum est punctum L. Et primò quidem, si *angulus* B A C rectus sit^a, ductâ K N *directrici* D E parallelâ, quæ occurrat applicatæ L I, aut eidem productæ, si opus fuerit, in N: cum *intervallum* K L æquale sit dimidiæ *directrici* A E vel A D, ideoque & K L quadratum æquale A E vel A D quadrato, ablati utrinque æqualibus, nimirum^a, quadrato K N ab una, & quadrato A I ab altera parte, residua quoque, nempe L N quadratum & D I E rectangulum^a, æqualia erunt. Unde cum^b sit^c ut L I quadratum ad L N quadratum, id est^d, ad D I E rectangulum, demonstr.

^a per 34
primi.
^b per 47
primi, & 5
secundi.
^c sit^d per 4
& 22
secundi.
^d per supra
gulum,

Fig. I.



Fig. II.

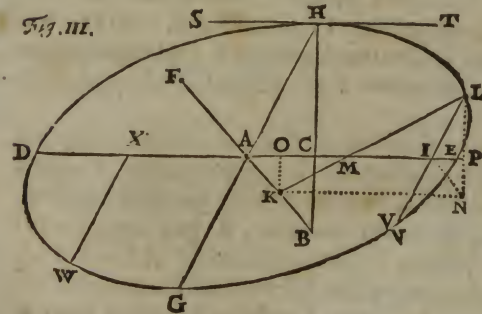


¹ per 15
quinti.

gulum, ita LM quadratum ad LK quadratum, hoc est, ita FA
quadratum ad AE quadratum, sive ¹ ut FG quadratum ad DE

quadratum, con-
stat priori casu
propositum.

Non sit dein-
de *angulus* B A C
rectus ⁶, ducan-
turque ad *dire-*
ctricem, eamvè
productam, si
opùs fuerit, re-
ctæ KO, LP
describenti BC
parallelae, ideo-



que ad *directricem* DE perpendiculares, ut & IN lateri AB pa-
rallela, quæ ipsi LP, eidemvè productæ, si opùs fuerit, occur-
² per 29 pri- rat in N; ita ut ² similia sint triangula AHC & ILP, item-
que

Fig. IV.



Fig. v.

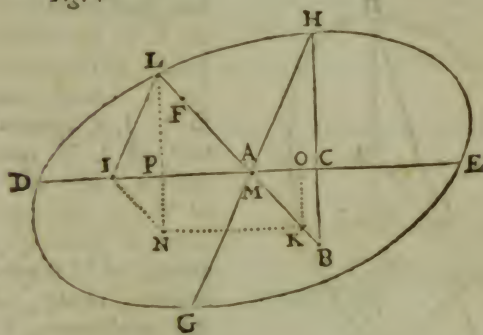
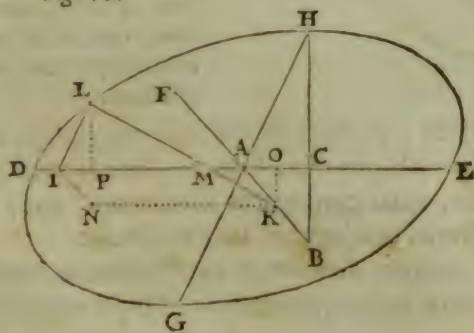


Fig. VI.



que AHB & ILN , ac denique jungatur KN . Quoniam itaque est ⁱ, ut ^{per 4 sex.} BA ad KA , ^{ti.} sive ut BC , id est, MK , ad KO , ita ML , hoc est, HC , ad LP ; ut autem HC ad LP , ita HA ad LI , & ita BA ad NI , ac per consequens BA ad KA , ut eadem BA ad NI : erit ² KA ip- ^{per 9 quin-} si NI æqualis. Sunt autem & parallelæ, ex hypothesi. Quare & AI , KN æquales & parallelæ erunt ³. ^{per 33 pri-} Porro cum æ- ^{mi.} quales sint rectæ KL & AE vel AD , ideoque & ipsarum quadrata, hinc subductis ab iis æqualibus, quadrato nimirum KN ab una, ac quadrato AI ab altera parte, erunt

Fig. VII.

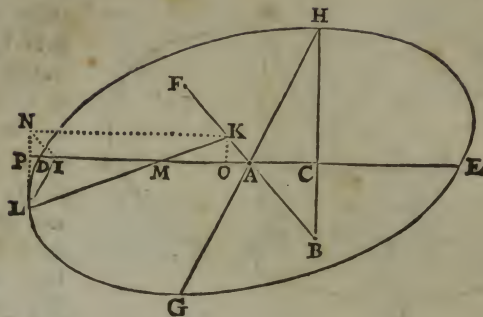
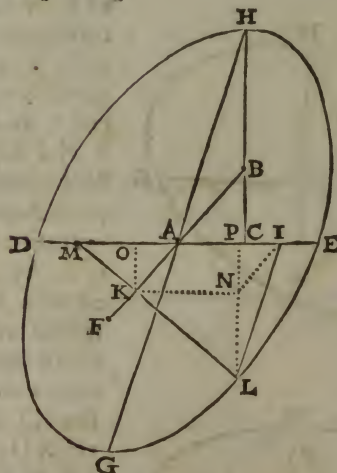


Fig. VIII.



¹ per 47 primi, & 5 secundi.

² per 4 & 22 sexti.

³ per supra demonstr.

⁴ per 15 quinti.

erunt quoque residua, quadratum nempe LN & rectangulum DIE æqualia ¹. Unde cum sit ² LI quadratum ad LN quadratum, hoc est ³, ad DIE rectangulum, ut AH quadratum ad HB quadratum, id est, ad AE quadratum, siue ⁴ ut HG quadratum ad DE quadratum, erit etiam hoc casu propositum manifestum.

Atque ita liquet, prædictam curvam eam ipsam esse, quæ Veteribus Ellipsis dicta fuit, *directricem* verò ac *secantem* eas ipsas, quas conjugatas diametros, aut, si *angulus* rectus fuerit, conjugatos axes vocârunt.

Conjugatas itaque diametros appellabimus binas rectas per centrum ductas, ac utrinque Ellipsi terminatas;

tas ; ita ut (quemadmodum de *directrice* & *secante* jam demonstratum est,) quadrata rectarum quæ alteri ipsarum applicantur alteri æquidistant, ita se habeant ad rectangula sub partibus per applicationem factis, ut quadratum alterius ad quadratum ejusdem quæ per applicatas secatur.

Et hæc quidem, cui applicatæ insistant, transversa ; illa verò, cui eadem æquidistant, secunda diameter vocabitur.

Cæteræ autem omnes, per centrum ductæ ac utrinque Ellipsi terminatæ, diametri simpliciter dicentur.

Rectam lineam quæ transversæ secundæque diametro tertia est proportionalis, Latus Rectum sive Parametrum vocabimus ad transversam diametrum pertinentem.

Notandum tamen est, si *angulus* rectus sit, ac *punctum* ab utroque *describentis* termino æqualiter distet, curvam, quæ motu ejusdem *puncti*, uti prædictum est, describitur, circumferentiam Circuli esse.

Corollarium 1.

Ex ipsa demonstratione & collatione figuræ primæ cum secunda manifestum est: in Ellipsi, conjugatorum axium transversum etiam secundum esse, & contra. Sive enim *L* vel huic vel illi axi applicata sit, eodem modo semper probabitur esse quadratum ejusdem applicatæ ad rectangulum sub partibus axis cui applicatio fit, ut quadratum axis alterius ad quadratum axis prædicti qui per applicatam secatur.

Corollarium 2.

Apparet porro rectam per punctum ductam *directrici* parallelam, hoc est, eam, quæ per terminum secundæ diametri transversæ

Dd

210 ELEM. CURVARUM
 versæ æquidistans ducitur, Ellipsin in eodem termino, & in
 nullo præterea puncto contingere, multò minus eandem seca-

Fig. I.

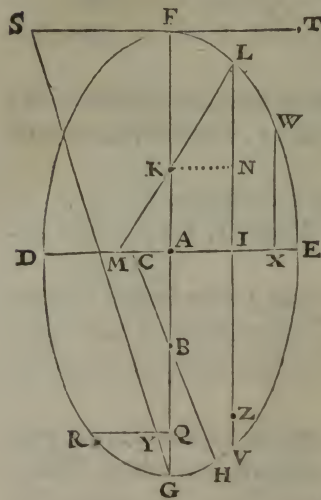
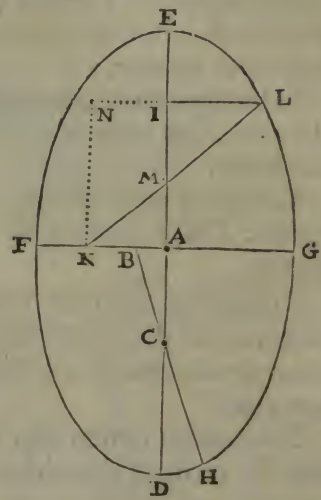


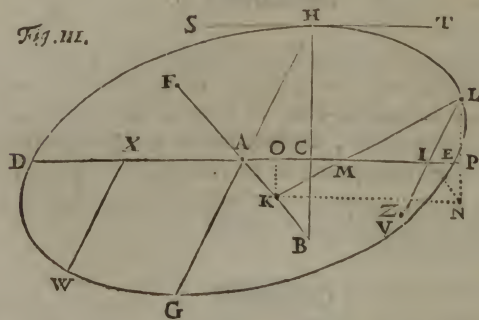
Fig. II.



a in casu
 fig. I & si-
 milib.
b in casu
 fig. III &
 similib.

re. Si enim per F^a aut H^b terminum secundæ diametri GF^a
 vel GH^b ductâ rectâ ST , transversæ diametro DE paralle-

Fig. III.



lâ, assumatur aliud quodcunque in curva punctum, veluti L ,
 quod descriptum sit *describente* in statione KM , ducaturque
 LI

LI^a vel LP^b ad transversam diametrum perpendicularis, fiet ut ^{a in casu} in triangulo MLI^a vel MLP^b recta ML , id est, perpendicu- ^{fig. 1 & si-} ^{mulib.} ^{b in casu} laris FA^a vel HC^b , major sit ^a quàm LI^a vel LP^b ; adeò ^{fig. 111 &} ^{similib.} ut punctum L , quod in curva utcunque assumptum est, id est, ^{a per 18 pri-} ^{mi.} tota Ellipsis, præter F^a aut H^b punctum, infra ductam ST , seu versus Ellipseos centrum, cadat.

Corollarium 3.

Manifestum quoque est in Ellipsi applicatarum quadrata ad se invicem esse, ut rectangula sub diametri portionibus per applicatas factis. Ut si applicatæ sint LI , WX , erit quadratum WX ad rectangulum DXE , ut quadratum LI ad rectangulum DIE : cum ^a utriusque ratio sit eadem quæ quadrati FG^a vel HG^b ad quadratum DE , sive quæ parametri ad transversam ^{a per 1;} ^{hujus.} diametrum; ideoque & permutatim WX quadratum ad LI quadratum, ut DXE rectangulum ad DIE rectangulum.

Corollarium 4.

Constat etiam ordinatim ad axem sive diametrum applicatas utrinque ad Ellipsin productas ab axe sive diametro bifariam secari. Ut, si applicata LI producta Ellipsi occurrat in V , quoniam est ^a quadratum LI ad rectangulum DIE , ut quadratum VI ^{a per Cor.} ^{præced.} ^{a per 9} ^{Quinti.} ad idem DIE rectangulum, erit ^a quadratum LI æquale quadrato VI , ideoque & ipsa recta LI ipsi rectæ VI æqualis.

Corollarium 5.

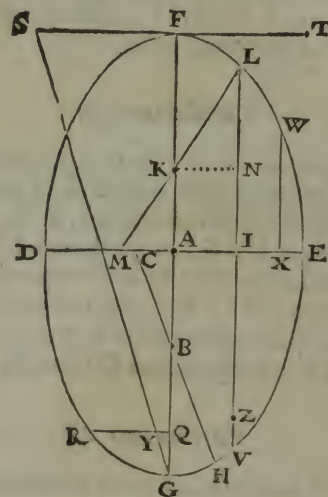
Constat porro, applicatas Ellipsi in pluribus quàm duobus punctis non occurrere. Si enim LIV alio sui puncto præter L & V , exempli gratiâ, puncto Z , in Ellipsi esset, rectæ IL & IZ ^a ^{a per Cor.} ^{præcedent.} ideoque IV & IZ pars & totum, æquales forent, quod est absurdum.

Corollarium 6.

Ex dictis porro colligitur, si ab extremitate transversæ diametri,
D d 2

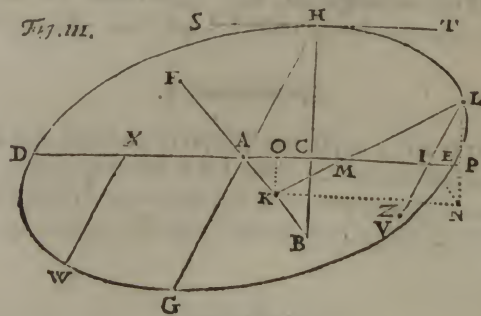
212 ELEM. CURVARUM
 in casu metri, ut puta FG^a, eductâ parametro FS secundæ diametro DE parallelâ, jungatur SG, atque ad eandem diametrum recta

Fig. I.



quælibet ordinatim applicetur, ut RQ, quæ secet junctam SG in Y: fore rectangulum FQY quadrato applicatæ RQ æquale.

Fig. III.



¹ per 13
 majus.
² per Cor.
 20 sexti.
³ per 1 sexti.

Quoniam enim est ¹ GF quadratum ad DE quadratum, id est ² GF ad FS, five GQ ad QY, hoc est ³ GQF rectangulum ad YQF

Y Q F rectangulum, ut ¹ idem G Q F rectangulum ad R Q qua- ¹ per 13
dratum, æqualia erunt ² Y Q F rectangulum & R Q quadra- ² hujus.
tum: id est, si veterum Geometrarum more id proponi placeat. ³ per 9
quinti.

Quæ ab Ellipsi ad diametrum applicatur potest spa-
tium adiacens lateri recto, latitudinem habens lineam
quæ à diametro inter ipsam applicatam & diametri
verticem abscinditur, deficiensque figurâ simili simi-
literque positâ ei quæ lateribus transverso rectoque
continetur.

Corollarium 7.

Patet quoque ex antedictis, quo pacto, datis quibuscumque dia-
metris conjugatis, Ellipsis in plano describatur.

Ut si conjugatis axibus D A E & F A G Ellipsis sit descri- ^{a in casu}
benda, ^{describente} B C, quæ semi-axium A D, A F differentia sit, ^{fig. 1 & si-}
intervallus verò H C, H B, ipsis A F, A D utroque utrique æquali-
bus, in angulo D A G, curva describatur, eritque hæc ipsa Ellipsis
quæ sita.

At si aliis quibuscumque conjugatis diametris, obliquè sese inter-
secantibus, ut D E, H G ^b, Ellipsis sit describenda: demissa à ter- ^{b in casu}
mino unius ad alteram perpendiculari, ut H C, sumptâque in ea ^{fig. 111 &}
dem seu in ipsa producta, si opus fuerit, rectâ H B ipsi D A vel ^{similib.}
A E æquali, & per B & A ductâ rectâ B A F, si ^{describente} B C, in-
tervallus verò H C, H B, in angulo B A C Ellipsis describatur, erit
hæc ea ipsa quæ quæritur.

Itaque cum datis diametro parametroque, nec non angulo
quem faciunt cum eadem diametro ordinatim ad ipsam applica-
tæ, conjugatæ quoque diametri datæ sint: simul quoque innot-
scit, quo pacto & illis datis Ellipsis describatur.

THEOREMA XIII.

Propositio 14.

In Ellipsi circâ quoscunque axes descriptâ, ducta quæ-
libet diameter transversa est, haberque secundam sibi
conjugatam.

D d 3

Sit

¹ per 4 primi.



2 per 13 bu-
jus ejusque
Corol. 7.

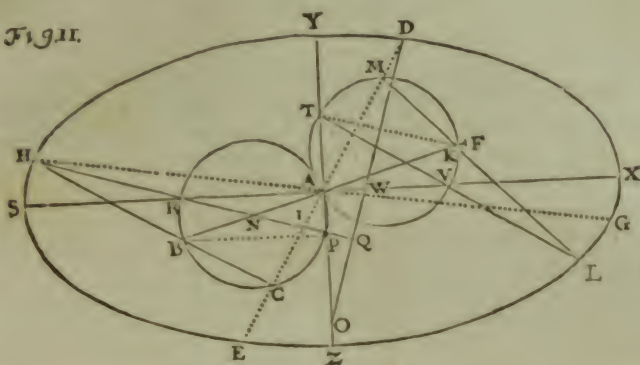
aut certe,
quia pun-
ctorum T
& V alter-
utrum cum

utrum cum puncto A coïncidit, uti est casus in fig. VI. 3 per conversam 31 tertii.

DAE alibi etiam secabit ^b, uti in K & M. Deinde junctâ KM, eaque productâ versùs L, agantur TK, PB.

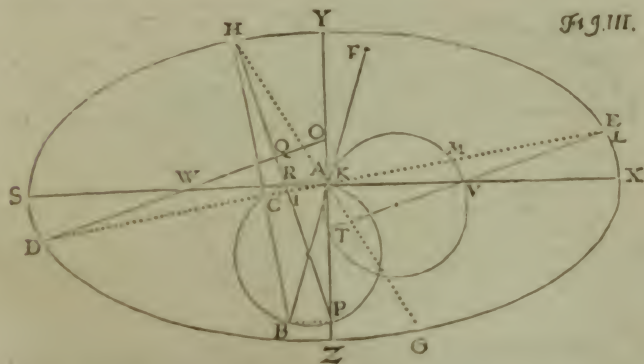
^b aut illarum alteram continget, alteram verò secabit, ut in casib. fig. III & IV.

Fig. II.



Cum igitur ipsarum DO, HP, productarum, si opus fuerit, intersectio ad Q fiat ad angulos rectos, ob similitudinem trianguli OQP cum utroque triangulorum OAW, RAP, nota-^c vel, si puncta O & P coincident, ob angulos AOW, APR semirectos.

Fig. III.



IQD, ICH æquiangula, ob angulos ad Q & C rectos, ad I verò aut communem aut ad verticem. Ideoque cum triangula ODA, PHB latera OD, DA lateribus PH, HB, utrumque utrique, circum æquales angulos æqualia habeant: erit & ^{per 4 pri-} O A ^{mi.}

per 27 pri-
mi.

² per 4 pri-
mi.

3 per con-
versam 31
tertii

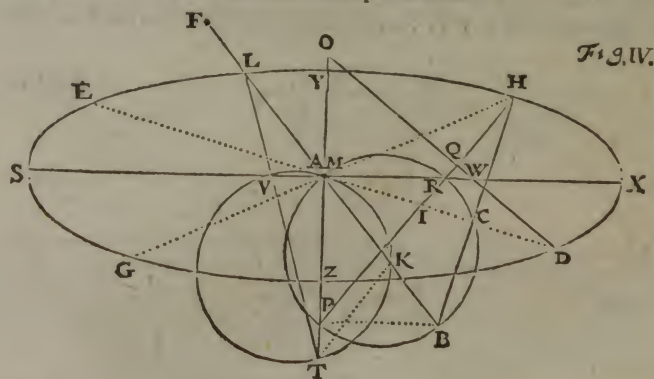
4 per con-
versam 21
terti

ad pro casu fi
fig. II uterq
cum angul

casu fig. I V a
v ero cum ang

utrumque cum
fig. VI æqua

terior vero d



6 per 20 ter.
 ii. atque in

casu fig. III
per eandem

& 32 *terti*.
 ¶ In casibus

fig. IV & V
figs. confis.

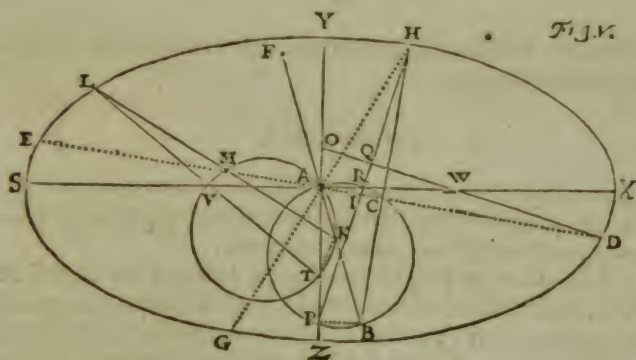
elos conflict

—

pe latera PB , TK dictis æqualibus angulis adjacentia inter se æqualia ϵ : apparet sicuti rectæ BC , PR productæ concurrunt in H , ita quoque rectas KM , TV productas, & quidem, cum ipsi PH æqualis sit TL , in ipso puncto L concursuras. quippe ex antedictis ϵ similia atque in totum æqualia sunt triangula BPH , $KT L$, adeoque & latus KL lateri BH æquale. Est autem ϵ & subtensa KM subtensæ BC æqualis h , ob æquales an-

In casu fig. III, ubi recta BAF tangit circumculum TKV , æqualia sunt latera BP , TK ob an-

gulos BAP , TVK æquales per 32 tertii. In casu fig. VI, ubi recta PAY contingit circumculum TKV , æquales sunt subtensæ BP , TK ob angulos PAB , TMK æquales per 32 tertii. ϵ per 26 primi. h In casu fig. III KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus qui consistit in segmento KTM æqualis foret angulo FAM seu BAC per 32 tertii. In casu fig. IV KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus KTM æqualis est angulo KAC seu BAC per 32 tertii. In casu fig. V KM ipsi BC est æqualis, quandoquidem angulus in segmento BC æqualis foret angulo KAM , utpote cum tam huc quam ille cum angulo CAB duos rectos constitueret per 13 primi & 22 tertii.

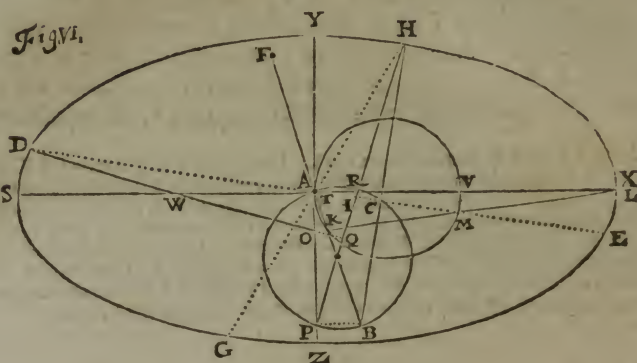


gulos KAM , BAC . Quocirca & LM ipsi HC æqualis erit. Unde cum describens sit KM , utpote ipsi BC æqualis, ac constituta in angulo KAM (qui cum ipso BAC vel idem ϵ , vel ei ad i ut in casu verticem ϵ , vel denique ipsi deinceps est ϵ) aut certe cum al- i ut in casu terutro crurum coincidens m , atque ex demonstratis æqualia k ut in casibus fig. I, & quoque sint intervalla HB , HC intervallis LK , LM : sequitur punctum L , in exposita Ellipsi utcumque sumptum, id est, l in casu totam Ellipsin $SYXZ$, esse in Ellipsi, quæ in angulo BAC , in- l in casu m ut in casibus fig. III & IV. m ut in casibus fig. III & IV.

E c

omnia

¹ per 13 hujus, ejusque Cor. 7. omnia congruere. Sunt autem ¹ hujus conjugatæ diametri DE, HG. Quare & illius, quæ cum ipsa eadem est, conjugatæ dia-



metri erunt, nimirum DE transversa, & HG secunda. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 1.

Hinc colligitur non solum Ellipses omnes suos habere axes, sed & quo pacto datis quibuscumque diametris conjugatis, ejus Ellipseos ejus diametri sunt, axes inveniantur.

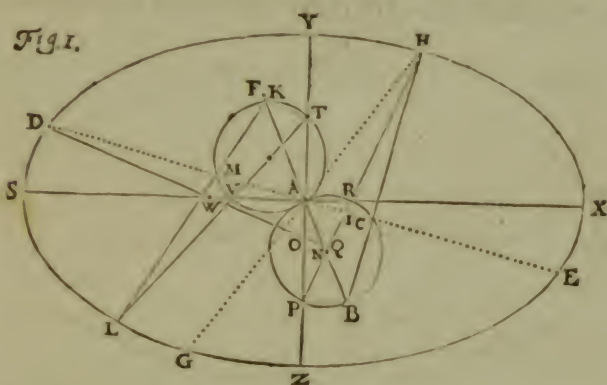
Ut si cujuscunque Ellipseos conjugatæ diametri sint DAE & HAG, ductâ HB, semidiametro DA vel AE æquali, atque ad DE perpendiculari, junctâque BA ac ipsâ bifariam in N divisâ, si centro N intervallo NA vel NB circulus describatur, secans rectam per H & N ductam in P & R: erunt rectæ HP, HR semi-axes magnitudine, quæ idcirco utrinque à centro A versùs aut per puncta R & P, æquali longitudine in directum positæ, sicut totæ SX & YZ, exhibebunt magnitudine ac positione quæ sitos axes ejusdem Ellipseos, cujus DAE & HAG conjugatæ diametri existunt.

² per 4 primi.

³ per 31 tertii.

Ductâ enim PB, sumptâque AO ipsi AR, ideoque ² & ductæ PB æquali, agatur DO, occurrens ipsi SX in W. Cum itaque ob angulum ACB rectum descriptus circulus etiam per C transeat ³, erunt anguli PBH & OAD æquales, quoniam uterque

que cum angulo $\angle PAC$ seu $\angle PBC$ duos rectos constituit ¹. Un-
 de cum triangula OAD , PBH latera OA , AD lateribus PB , ^{cum angulo}
 BH , utrumque utrique, & quidem circa \angle aequales angulos \angle aequa-
 lia habeant: erit quoque ² basis OD basi PH , id est, recta SA ^{in ca-}
 vel AX , ut & angulus $\angle AOD$ angulo $\angle BPH$ seu $\angle PRA$ ^{similibus, &}
 Hinc cum \angle equalia sint triangula RAP , OAW , propter angu-
 los ad R & O \angle aequales, atque $\angle RAP$, OAW rectos, nec non ^{cum angulo}
 latera RA & OA \angle equalia: erit etiam ³ latus AW lateri AP , ut ^{in ca-}
 & latus OW ipsi PR \angle equalis. Quocirca cum ⁴ ^{per 13 pri-} ^{mi & 22} ^{tertii.} ⁵ ^{per 26 primi.} ⁶ ^{per 13 hujus.} ^{describentes sint}



OW , PR ejus Ellipseos, cujus axes sunt SX , YZ , & quidem
 in statione reciproca constituta, punctaque efficiunt D & H : ma-
 nifestum est ex superiori demonstratione, Ellipsin, quae axibus
 SX , YZ describitur, cum ea, cujus diametri conjugatae sunt
 DE & HG , omnino eandem esse:

Atque ita, quae de Ellipsi, circa quoscunque axes de-
 scripta, superiori Theoremate proposita ac demon-
 strata sunt, etiam cuilibet Ellipsi, & circa quascunque
 diametros conjugatas descripta, convenire, manife-
 stum est.

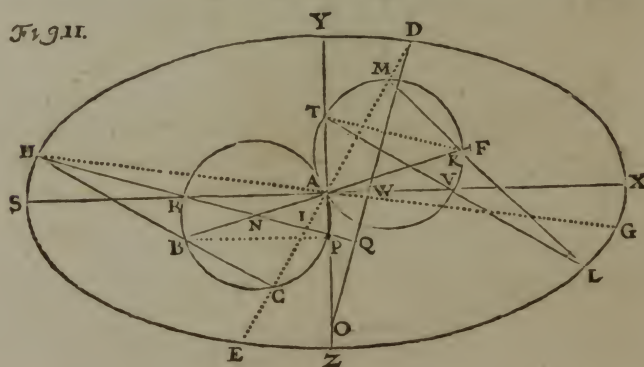
Corollarium 2.

Sequitur porrò ex demonstratione ejusdem Theorematis, in Ellipsi diametros omnes à centro bifariam secari. demonstratum enim est, in diametro DE, utcumque ductâ, partem AE parti DA æqualem esse, cum utraque intervallo HB æqualis sit.

Corollarium 3.

Patet insuper in Ellipsi, quarumcunque diametrorum conjugatarum transversam etiam secundam esse, & contra. Ut, si conjugatarum diametrorum DE, HG transversa sit DE, & HG se-

Fig. II.



¹ per 14 hujus ejusque Corol. 1.

cunda; cum in Ellipsi ducta quælibet diameter ¹ transversa sit, habeatque secundam sibi conjugatam, erit quoque HG transversa. At verò & DE secundam esse ipsi HG conjugatam, factâ collatione figuræ I cum II transpositis tantum literis, ac mutatis mutandis demonstratum simul apparebit.

Corollarium 4.

Quare & quæ per terminum transversæ diametri secundæ æquidistans seu ordinatim applicatis parallela ducitur Ellipsin in eodem termino & in nullo præterea puncto contingit, totaque extra Ellipsin cadit ².

² per 2 Cor. 13, & 3 Cor. 14 hujus.

Co-

Corollarium 2.

Quocirca si in Ellipsi binæ quælibet rectæ sibi invicem æquidistantes ductæ sint, quæ utramque bifariam dividet recta lineæ per illius centrum transibit, seu ejusdem diameter existet. Quippe quæ per medium unius æquidistantium diameter ducetur per medium quoque alterius æquidistantium transibit ¹. Unde apparet, quo pacto datæ Ellipseos diametros quotlibet, simulque ad easdem ordinatim applicatas, nec non & ejus centrum, utpote quod duarum pluriunivè diametrorum communis intersectio est, ideoque & diametros conjugatas, axesque ² invenire liceat.

per I Cor.
15 hujus.

2 per I Cor.
I 4 hujus,
aliterve, ut
cuilibet ob-
vium est.

Corollarium 3.

Ex dictis facile apparet, quamlibet rectam, quæ bina quæcun-
que Ellipseos puncta conjungit, totam intra Ellipsin cadere :
utpote cum ipsa⁴ vel diameter sit, vel ordinatim applicata ad eam
diametrum, quæ per ipsius medium & centrum ducitur.

3 per 5 Cor.
14 hujus.
4 per 15 hu-
jus ejusque
Cor. I.

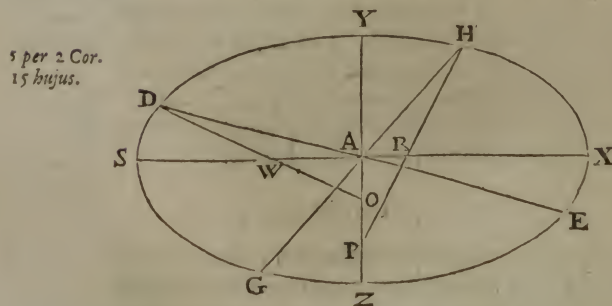
P R O B L E M A II.

Propositio 16.

In data quacunque Ellipsi ductæ cuilibet diametro alteram conjugatam invenire.

In data Ellipsi $S Y X Z$ ductæ utcunque diametro $D A E$ al-

tera conjugata
invenienda sit.
Inventis \therefore axi-
bus S A X &
Y A Z, atque à
termino D. vel
E ad axium al-
terutrum, ve-
luti ad Y A Z,
applicatâ re-
ctâ, ut D O,
femi-axi alteri
t eundem axem
alte-



alterum, uti in W, applicetur in statione reciproca ipsi OW, eidem æqualis recta PR, nempe ut AP, AR ipsi AW, AO singulæ singulis æquales sint, ac producta PR Ellipsi occurrat in puncto H, à quo si per centrum A ducatur recta HAG, Ellipsi terminata: constat, per ea, quæ ad Propositionem 14^{am} hujus libri demonstrata sunt, eandem HAG esse diametrum ipsi DE conjugatam.

Atque ita simul apparet, singulis diametris suas quoque distinctas conjugatas diametros esse, eidemque diametro unam tantum conjugatam duci posse.

Corollarium.

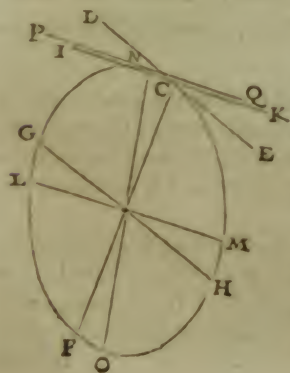
Unde porro perspicuum sit, quo pacto per datum quodlibet in Ellipsi punctum recta ducatur, quæ curvam in eodem ac in nullo alio præterea puncto contingat. Si enim ducta per datum punctum & centrum diametro, inventaque altera ipsi conjugata¹,
per idem punctum recta ducatur inventæ diametro conjugatæ æquidistans: erit eadem recta² contingens quæsitæ.

¹ per 16 hujus.
² per 4 Cor. 14 hujus.

T H E O R E M A X V.

Propositio 17.

Ellipsin in uno eodemque puncto præter rectam, quæ parallela est diametro illi, quæ per punctum & centrum ducitur, conjugatæ, alia recta non contingit.



Contingat Ellipsin CHFG in puncto C recta DCE, parallela diametro GH, quæ conjugata sit diametro CF, per punctum C & centrum ductæ: dico aliam rectam in puncto C eandem Ellipsin non contingere.

Si enim fieri potest, contingat eandem quoque in puncto C recta ICK, diametroque LM, eidem ICK æquidistanti, altera conjugata ducatur NO, (quæ cum à priori CF

224 E L E M. C U R V A R U M

² per 4 Cor. CF diversa sit ¹, punctum N cum puncto C non coïncidet,)
¹⁴ hujus. ac per N ipsi LM, ideoque & contingenti ICK, æquidistans du-
² per 2 Cor. sta sit PQ. Cader itaque ² punctum C, adeoque recta ICK in-
¹³ hujus. fra rectam PNQ: nimirum, versùs Ellipseos centrum. At verò
³ per idem & eodem modo ³ punctum N, ideoque recta PNQ, infra con-
 Coroll. tingentem ICK: nempe, versùs idem centrum cadet. quod re-
 pugnat. Non contingit ergo ICK Ellipsin. Eadem de omnibus
 aliis est demonstratio, ac proinde constat propositum.

Corollarium.

⁴ per Coroll. Constat itaque ⁴ in Ellipsi cuilibet tangenti parallelas, æqui-
 præcedens. distantes quoque esse diametro conjugatæ ei, quæ per tactum &
 centrum ducitur; ac proinde & ad diametrum per tactum ductam
⁵ per 4 Cor. ordinatim applicari, atque ab illa bifariam dividi ⁵. & contra,
¹³ hujus. quæ per cujuscunque diametri terminum ducitur æquidistans cui-
 libet rectæ, per eandem diametrum bifariam sectæ, Ellipsin in
 eodem vertice contingere.

T H E O R E M A XVI.

Propositio 18.

Si quælibet contingens productæ Ellipseos diametro
 cuicunque occurrat, atque à puncto contactus ad ean-
 dem diametrum recta ordinatim applicetur: erit re-
 ctangulum sub diametri portionibus, à centro per con-
 tingentem applicatamque abscissis, semidiametri qua-
 drato æquale, & contra.

Quamcunque Ellipsin GD, cujus centrum A, contingat in
 puncto D, utcunque sumpto, recta DE, diametro IG occurrens
 in E; atque à puncto contactus D ad eandem diametrum ordi-
 natim applicata sit DC: dico rectangulum CAE quadrato se-
 midiametri AG æquale esse.

Sit enim primùm axis diameter IG, sitque OW describens, in
 statione uti fuit, cum per eandem descriptum est punctum D; ita
 ut OD intervallum semi-axi AG æquale sit, PR autem describens
 in statione, ipsi OW reciproca; ita ut à curvæ puncto H, quod
 nempe

nenipe describenti PR in directum est, ducta diameter HA conjugata sit ei, quæ per D & A duceretur ¹, ideoque & contingenti DE parallela ². Sitque porro ad secundum axem AK applicata HF, ducanturque OB, RT

¹ per 4 Cor.

¹⁴ huius.

² per Cor.

¹⁷ huius.

ipsis AG, AK æquidistantes, quæ applicatis DC, HF, productis, si opus fuerit, occurrant in B & T.

Itaque cum similia sint triangula OAW & RAP ³, erunt quoque triangula WCD & RTH, nec non OBD & PFH ⁴ similia. At verò & latera WD & RH, nec non OD & PH ⁵ æqualia sunt.

³ ex constructione.

⁴ per 29 primi, & 21 sexti.

⁵ ex constructione.

Quare & latera WC & RT sive AF, nec non DB, & HF ⁶ æqualia erunt. Sunt autem porro ⁷ triangula EDC & HAF æquiangula; unde ex antedictis erit ⁸ DC ad CW sive AF, id est ⁹, EC ad HF sive DB, uti eadem DB ad BO ¹⁰.

⁶ per 26 primi.

⁷ per 29 primi.

⁸ per 4 sexti.

⁹ propter triangula EDC, HFA æquiang.

¹⁰ propter triangula DCW, DBO æquiangula.

¹¹ per Cor.

¹² sexti.

¹³ per 18 quinti.

¹⁴ per 47 primi.

¹⁵ per Cor.

¹⁶ sexti.

¹⁷ per 17 sexti.

¹⁸ per 17 sexti.

¹⁹ per 17 sexti.

²⁰ per 17 sexti.

²¹ per 17 sexti.

²² per 17 sexti.

²³ per 17 sexti.

²⁴ per 17 sexti.

²⁵ per 17 sexti.

²⁶ per 17 sexti.

²⁷ per 17 sexti.

²⁸ per 17 sexti.

²⁹ per 17 sexti.

³⁰ per 17 sexti.

³¹ per 17 sexti.

³² per 17 sexti.

³³ per 17 sexti.

³⁴ per 17 sexti.

³⁵ per 17 sexti.

³⁶ per 17 sexti.

³⁷ per 17 sexti.

³⁸ per 17 sexti.

³⁹ per 17 sexti.

⁴⁰ per 17 sexti.

⁴¹ per 17 sexti.

⁴² per 17 sexti.

⁴³ per 17 sexti.

⁴⁴ per 17 sexti.

⁴⁵ per 17 sexti.

⁴⁶ per 17 sexti.

⁴⁷ per 17 sexti.

⁴⁸ per 17 sexti.

⁴⁹ per 17 sexti.

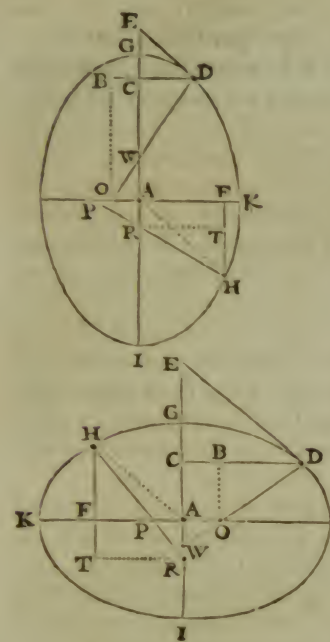
⁵⁰ per 17 sexti.

⁵¹ per 17 sexti.

⁵² per 17 sexti.

⁵³ per 17 sexti.

⁵⁴ per 17 sexti.



componendo ¹¹, ut EA ad CA, ita ¹² DO quadratum ad BO quadratum, hoc est, GA quadratum ad CA quadratum; ac proinde ¹³ & rectæ EA, GA, CA proportionales erunt, ideoque ¹⁴ rectangulum CAE quadrato semi-axis AG æquale. Cumque in puncto D alia recta præter ipsam DE Ellipsin contingere non possit ¹⁵, patet conversum quoque verum esse: nimirum, si rectangulum CAE æquale sit quadrato semi-axis AG, & per C ordinatim applicata Ellipsi occurrat in D, junctam ED esse contingentem.

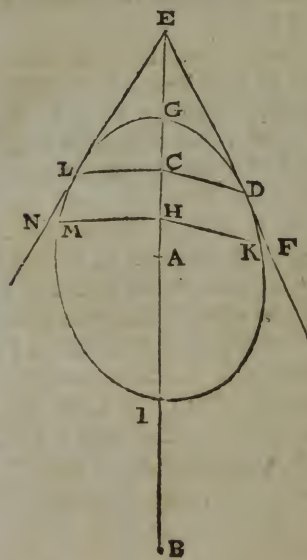
Deinde non sit recta IG Ellipseos GD axis, sed alia diameter quæcunque, cujus parameter IB, atque ab assumpto in curva

Ff

utcum-

utcumque puncto D ad eandem diametrum ordinatim applicetur DC, sitque quadrato semidiametri AG æquale rectangulum CAE: dico junctam ED, productamque, totam extra Ellipsin cadere, ideoque eandem in puncto D contingere, & conversum.

Sit enim in eadem ED, aut in ipsa producta, prout libuerit, assumptum utcumque punctum F, sitque per F ducta recta FH



² per sup.
demonstr.

ipsi CD æquidistans, quæ dictæ diametro IG occurrat in H, Ellipsi verò GD in K. (Etenim si Ellipsi non occurreret, manifestissime punctum F extra Ellipsin foret.) Deinde IG ut axe, eademque parametro IB, intelligatur descripta alia Ellipsis GL, ac per C & H ad eundem axem ordinatim applicentur CL, HM, quæ curvæ occurrant in L & M, jungaturque EL, (quæ utique Ellipsin GL in L continget¹.) eaque producta, si opus fuerit, productæ HM occurrat in N.

Itaque quoniam est quadratum DC ad rectangulum GCI, ut quadratum LC ad idem GCI rectangulum, (quippe utriusque eadem est ratio, quæ parametri IB ad diametrum sive axem IG².)

³ per 13 hujus, & Cor.
²⁰ sexti.

³ per 9 quinti.

⁴ per 4 sexti.

⁵ per 14 quinti.

⁶ per 17 hujus.

erunt³ quadrata DC, LC, ideoque & rectæ DC, LC æquales. Eodem modo, & rectas KH, MH æquales esse, demonstrabitur. At verò cum sit CD ad HF, ut CL ad HN, (liquidem⁴ utriusque eadem est ratio, quæ rectæ EC ad rectam EH,) erunt quoque⁵ HF & HN æquales. Est autem HN major applicatâ HM, cum contingens sit ELN: ergo & HF applicatâ HK major erit, ideoque punctum F, in recta EDF utcumque sumptum, hoc est, tota EDF, extra Ellipsin, GD cadet, sive, quod idem est, eandem in puncto D continget. Cumque non possit præter EDF alia recta eandem Ellipsin in puncto D contingere⁶, manifestum quoque est conversum: si nempe ED Ellipsin GD

in

in D contingat, diametroque G I occurrat in E, & ad eandem
diametrum ordinatim applicata sit D C, rectangulum C A E qua-
drato semidiametri A G æquale esse.

Corollarium.

Ex dictis perspicuum est, quo pacto à dato quolibet puncto
ducenda sit recta, quæ Ellipsin contingat.

Si enim datum punctum in ipsa curva sit, veluti D: jam supra ^{1 in Cor. 16.}
ostensum est, quo pacto per dictum punctum contingens ducatur. ^{hujus.}

Quod tamen & hoc quoque modo per præcedens Theorema
perficietur.

Ductâ ex D ad inventam ² diametrum G I rectâ ordinatim ^{per 2 Cor.}
D C, fiat rectangulum C A E quadrato semidiametri A G æqua- ^{15 hujus.}
le, jungaturque E D.

At si extra Ellipsin sit datum punctum, ut E: ductâ ad A cen-
trum ³ rectâ E A, quæ Ellipsin secet in G, quadrato A G æqua- ^{1 inventa}
le fiat rectangulum E A C; ac per C ductâ ordinatim applicata ^{per 2 Coroll.}
C D: nimirum, quæ ⁴ æquidistet contingenti quæ per G duce- ^{15 hujus.}
retur ⁵, occurratque Ellipsi in D, jungatur E D: eritque hæc ipsa ^{4 juxta Cor.}
tam priori quam posteriori casu ⁶ contingens quæsita. ^{17 hujus.}

A puncto autem intra Ellipsin dato non posse dari rectam, quæ
eandem contingat, manifestissimum est. ^{5 per præ-}
^{6 per 18 hujus.}

Atque ita me compendiosè viâ satis planâ ac maxi-
mè naturali, absque ulla solidi consideratione, Ele-
menta proprietatesque præcipuas Curvarum, quas Ve-
teres *Coni sectiones* appellavere, tradidisse confido. E
quibus principiis cætera omnia, quæ ad Parabolam,
Hyperbolam, vel Ellipsin pertinent, absque ulteriori
manuductione facillimè deducet, quicumque animum
iis debite applicuerit, atque in Geometricis per se ad
ulteriora progredi valeat. Adeò ut eadem tractandi
methodo hisce diutius inhærere supervacuum putem,
præsertim cum insignis & sublimior quædam scientia
super sit, cui Veteres enixissimè incubuisse ex quorum-
dam relatu ac nonnullis antiquorum Geometrarum
fragmentis manifestum est: quæque tam ab iisdem

quàm à Recentioribus. *Locorum Inventio* sive *Compositio* appellata fuit. Ad quam promovendam, ab Apollonio cæterisque Geometris ea præcipuè conscripta esse, quæ in Conicorum tractatione prædictis Elementis superaddidere, omnino credibile est. Cumque penitiorum curvarum linearum notitiam perfectamque earum enumerationem ac distinctionem, ut & distributionem in sua genera & species, cum segregatione earum, quæ verè Geometricæ non sunt, ab iis quæ in Geometriam sunt recipiendæ, ex accurata *Loci* tractatione imprimis petendam existimem: è re fore duxi, eandem tractationem hîc subungere, non quidem eâ methodo, sicut à Veteribus inchoata videtur, cum vix integrum & ingens volumen eidem sufficeret, si vel tantum *Locorum*, quæ *Plana*, ac *Solida* (quamvis, meo iudicio, minùs rectè,) vocârunt, id est, quæ vel *recta linea*, vel *Parabola*, vel *Hyperbola*, vel *Ellipsis*, sive *circuli circumferentia* existunt, (quorumque *Locorum Compositio*ni eos solummodo intentos fuisse invenimus,) doctrinam exactè complecteretur, atque id porrò volumen in immensum excrederet, si ad *Loca*, quæ sunt linearum curvæ secundi generis, uti nobis propositum est, extenderetur; sed Arte Analyticâ per *Æquationum* examen & præcepta generalia, quibus omnes omnino casus possibiles resolvantur ac determinentur. In quibus pertractandis eum ordinem sumus observaturi, ut jam post explicationem Elementorum *Parabolæ*, *Hyperbolæ*, & *Ellipsis*, (suppositâ notitiâ eorum, quæ ad linearum rectarum, angulorum, & figurarum rectilinearum, nec non Circulorum naturam pertinent) inventionem ac determinationem tradamus eorum *locorum*, quæ vel rectæ linearum sunt vel ex prædictis curvis constant; (Illa autem & nobis, ne quid temerè mutemus,

mus, *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* nomine venient) atque eo ipso ostendamus in primo curvarum genere, præter Circulum, non nisi Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin esse recipiendas. Tractationi autem ulteriorum locorum, quæ pertinent ad lineas curvas secundi generis, similiter quoque earundem curvarum Elementa præmittemus. Cum verò ad ipsarum generationem viam sternant non tantum descriptiones linearum curvarum primi generis, hoc libro propositæ atque explicatæ, sed & multi alii illas in plano describendi modi: operæ pretium duximus eorundem modorum, qui certè infiniti sunt, ut quilibet huic speculationi intentus facillè experietur, vel illos saltem hic adjungere, quos aut ad descriptiones curvarum secundi generis auxilio nobis fore, aut Mechanicæ curvarum primi generis in plano delineationi præcedentibus aptiores iudicamus.

C A P U T IV.

*Alia Parabolam, Hyperbolam, & Ellipsin in plano
delineandi Methodus.*

S It triangulum quodcunque isosceles ABC , & tam æqualia crura AB , AC , quam basis BC utrinque indefinitè producantur, ut ad D , E , & F , G , nec non HI ; sitque ab alterutro angulorum ad basin ducta quævis recta terminata, opposito cruri æquidistans, ut BK , & per terminum ejusdem K altera recta, utrinque indefinitè extensa, liberè transeat, quæ circa verticem anguli reliqui, nempe punctum A , ut Polum, circulariter mobilis sit, veluti $LAKM$; ac denique rectæ FG insistenti CN ipsi DE parallela transeat per ipsarum FG & HI intersectionem C . Dico, si angulus EBH atque ipsi ad verticem DBI cum recta BK moveatur in utramque partem, ita tamen ut crus AB semper applicatum maneat rectæ DE , simulque recta HI huc atque illud promoveat rectam CN , sibi ipsi semper æquidistan-

Ff 3

tem,

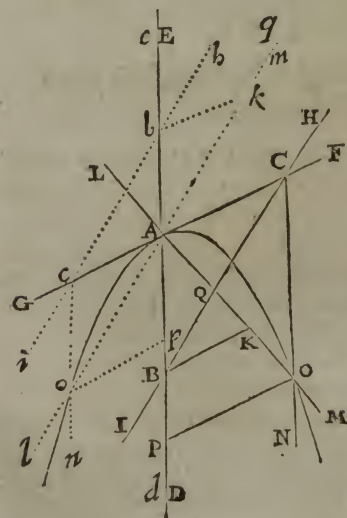
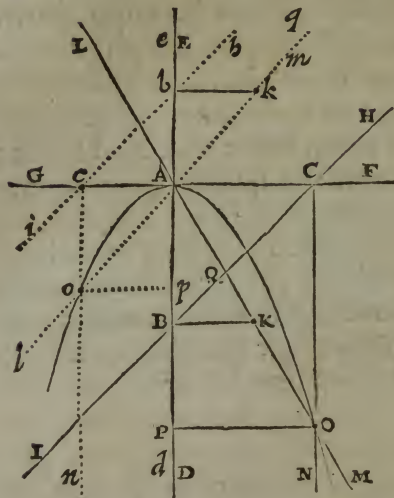
tem, ac recta BK ad polum A circulariter moveri faciat prædi-

er moveri faciat prædi-
ctum LM, per pun-
ctum K semper trans-
euntem, intersec-
tionem ipsarum CN,
LM, quæ fit ad O,
Parabolam describe-
re, cujus diameter est
AD, parameter KB,
ac FG eandem con-
tingens in vertice A.

In quacunque enim statione constitutus fuerit angulus EBH seu DBI , si intersectio rectarum FG , HI designetur per C , atque ab intersectionis puncto O ad dia-

metrum applicata sit OP ipsi FG æquidistans: erit semper KB ad BA, hoc est, ad AC, uti eadem AC ad CO: ac proinde² rectangulum sub KB, CO, id est³, sub KB, AP quadrato rectæ AC, hoc est⁴, ipsius OP æquale. Unde si BAC angulus rectus fuerit, erit AD axis, sin minus diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciunt angulos ipsi BAC vel BAG angulo æquales.

In transitu etiam hinc notandum est, eodem illo motu per intersectionem ipsarum HI, LM, puta Q, Hyperbolam sive oppositas



• per 29 pri-
mi, & 4
sexti.

² per 17
sexti.

3 per 34
primi.

4 per ean-
dem.

positas Hyperbolas describi; ut &, quamvis triangulum BAC isosceles non foret, nec etiam recta BK ex angulari puncto B sed ubivis in recta ADeducta esset, nihilominus tamen curvam AO Parabolam fore; at verò nec parametrum priori, nec verticem, nec diametrum posteriori casu easdem remanere, quas tamen illis quæque calibus determinare facillimum est.

Quoniam autem circa finem capitis primi monuimus, curvam, juxta definitiones in principio ejusdem capitis propositas, qualibet *efficiente*, & quocunque *intervallo* descriptam, si *anguli mobiles* inæquales sint *iis qui ad directricem* sunt ab eadem parte, Hyperbolam esse, idque Mechanicæ ejusdem in plano delineationi non inutile judicamus: idcirco id demonstratione jam comprobandum duximus, simul ostensuri, quo pacto eadem Methodus ad prædictas Hyperbolarum delineationes commodè applicetur.

Sit itaque *efficiente* IG, *intervallo* AL, & *directrice* KLO, angulis autem IAL & KLA inæqualibus, descripta curva DAM: dico eandem curvam Hyperbolam esse; ac si ductâ à Polo A ad *directricem* rectâ AK, ita ut angulus LAK angulo LAG æqualis sit, centro A & intervallo AK circulus describatur, secans *efficientem* in I & G, ac *directricem* in K & Q^a, perque puncta I & K, nec non per G & Q ducantur rectæ IK, GQ, sibi mutuò occurrentes in F, rectas FI, FG Asymptotos esse ^b.

Sumpto enim in curva puncto utcunque, veluti D, applicetur tam *angulus mobilis*, ut OAD, quàm *describens*, ut OD, in statione uti fuere, cum per eas descriptum est punctum D. Quoniam igitur æquales sunt anguli AIK, AKI inter se^a, nec non simul sumpti angulo KAG, (quippe tam posterior quàm prior^a cum angulo IAK binos rectos constituunt): erunt quoque anguli AIK seu AIF & GAL, utpote æqualium dimidia, inter se æquales, ac propterea^a rectæ IKF & AL parallelæ^a; tangat ibidem circulum recta, ita & eidem FG occurrant

GF in posteriori cum consingere cernitur. ^a per 5 primi. ^b per 13 & 32 primi. ^c per 28 primi. ^d in casu fig. III, quoniam uterque angulorum AIF & GAL rectus est, rectæ IF, AB parallelæ erunt.

^a aut eandem in K continens, uti in casu fig. V exhibito. ^b si verò dictorum punctorum bina coincidunt velut I & K in III, ac G & Q in IV fig. dem circulum recta, ut IF, in priori, &

tuit²,) & æquiangula erunt eadem triangula LAK & OQC¹ in I & II

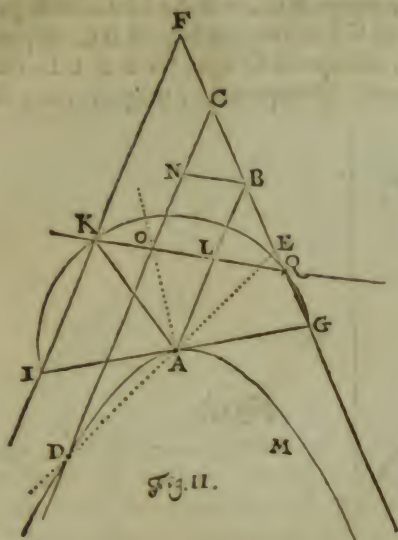
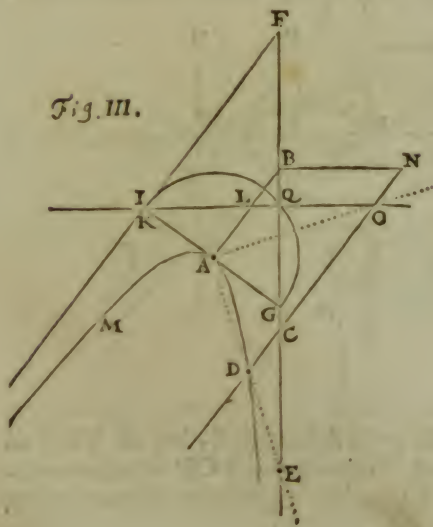


Fig. III.



Gg

sive³ NBC. Porro, quoniam angulus AGE angulo IKO seu ALO æqualis est, (quippe tam hic quam ille cum angulum OQC quam LAK rectum esse, per 13 primi, & 31 tertii: ac in fig. V & VI angulos GIF & OQC æquales, per 32 tertii & 21 ejusdem. & per 29 primi.

lo IGQ sive IGF¹ binos rectos constituit, in fig. I, per 13 primi & 22 tertii; in fig. III, per 13 primi & 31 tertii; in fig. IV per 13 primi, 18 & 31 tertii; in fig. V per 13 primi & 32 tertii; in fig. VI, per 13 primi, quoniam angulo IGQ æqualis est IKQ per 21 tertii.

tuit²,) atque angulis LAG, OAD iisdem sive æqualibus addito vel ablato communi OAG, compositi vel residui LAO, GAD vel GAE æquales quæ sunt, ac LO, AO sibi mutuo occurrant; GE quæ & AD sibi mutuo occurrant necessesse est; sit itaque ipsarum occurfus E punctum; & æquiangula erunt triangula, AGE, ALO, eritque propterea⁴ AL ad AG, ut LO sive NB ad GE. At verò

per 4 secundi permut.

(ob

¹ per sup. dem. (ob triangula LAK & NBC ¹ similia) est quoque ² eadem AL ad AK, hoc est, ad eandem AG, ut NB ad BC. unde per ³ per 11 consequens erit ³, ut NB ad GE, ita eadem NB ad BC. ac proinde ⁴ rectæ GE & BC, ideoque & GB seu ⁵ FB & CE, nec non BE & FC æquales erunt. Denique cum, propter triangula ⁵ per sup. demonstr.

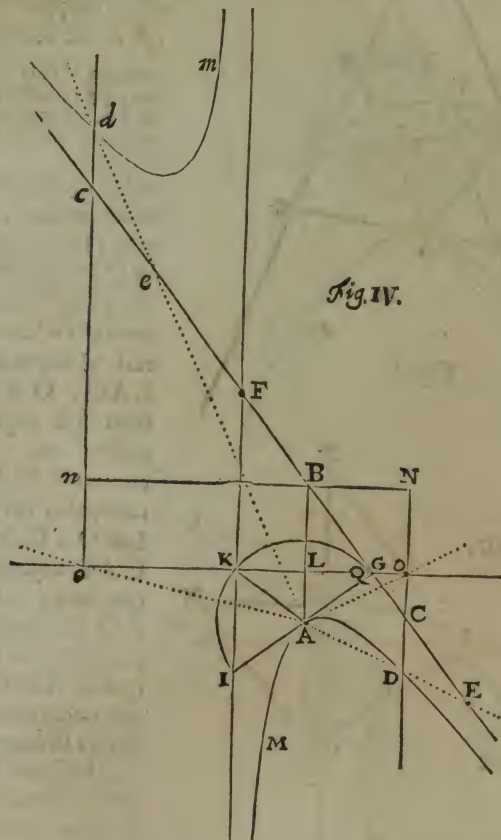
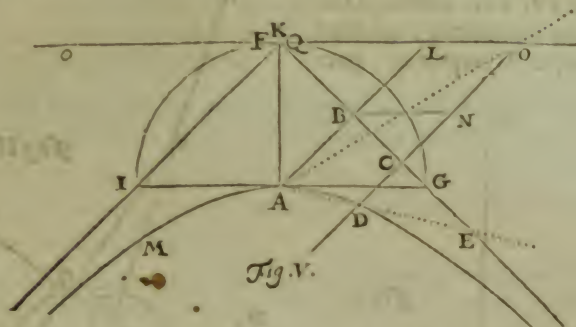


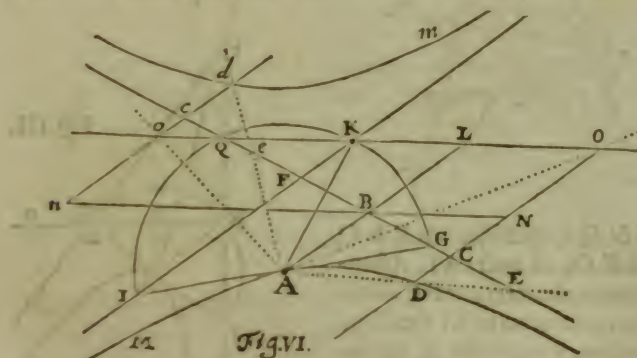
Fig. IV.

⁶ per 29 primi. ABE & DCE ⁶ similia, ⁷ BE sit ad CE, hoc est ⁸, FC ad FB, ut BA ad CD: erit ⁹ rectangulum FCD sub extremis æquale rectangulo FBA sub mediis. Quod cum semper accadat, ubi-
⁷ per 4 sexti.
⁸ per sup. demonstr.
⁹ per 16 sexti.

ubique in curva assumptum fuerit D punctum, sequitur ^{per 3 Lem.} curvam DAM Hyperbolam esse, cujus Asymptoti FI, FG. ^{sum.}
Quod erat ostendendum.



Ex antedictis manifestum est, si *efficiens* seu ^{*} contingens, ut ^{* per 6 le-} IG, ad Asymptotorum alterutram perpendicularis sit, veluti in
 tertia & quarta figura, vel *angulos mobiles* LAI & LAG rectos
 fore, si nempe *intervallum*, ut AL, æquidistans ductum sit ei Asym-
 ptoto cui *efficiens* seu contingens IG ad angulos rectos occurrit, ut



in tertia figura, vel certè *describentem* ad *directricem* fore perpendicularem, si nempe *intervallum* parallelum fuerit ei Asymptoto, cui eadem *efficiens* seu contingens GI occurrit ad angulos obliquos, ut in quarta figura.

Itaque si vel Asymptotis FI, FG, & contingente IG; vel dia-
Gg 2 metris

metris conjugatis HA , IG ,
Hyperbola sit describenda, du-
ctis in casu posteriore Asym-
ptotis FI , FG , diametro IG
circulus describatur, qui secet
utramque Asymptoton, puta

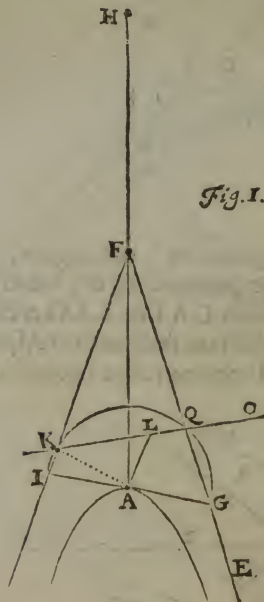


Fig. I.

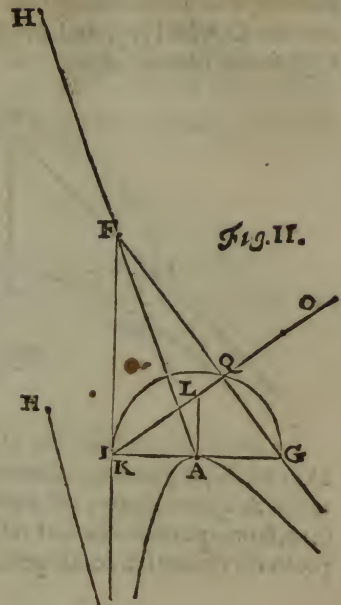


Fig. II.

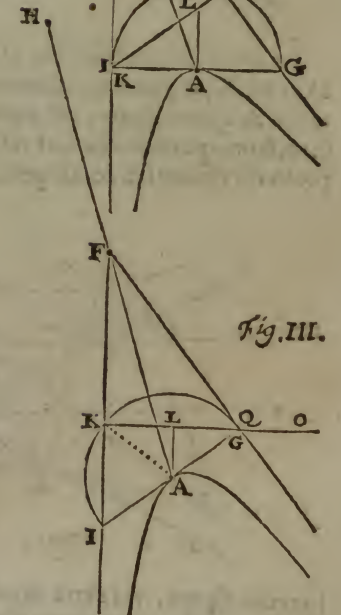


Fig. III.

* aut alte- in K & Q , ductâque per K & Q
ram tangat, rectâ KO , cui ducta AL , Asym-
& alteram ptotorum alterutri, ut FI , æqui-
fecet, ut in distans, occurrat in L : facillimè
II fig. fit in colligitur ex præmissis, si, efficien-
I & Q , ac te IG , intervallo AL , ac directrice
in III fig. KO , curva describatur, eandem
in G & K . fore Hyperbolam, quæ delineanda proponitur.

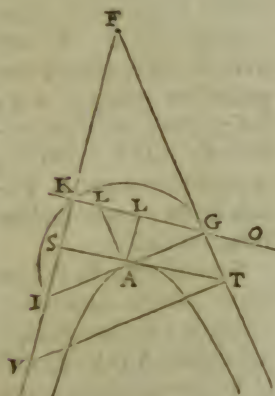
Nonnunquam tamen, ut obliquos circumferentiæ & rectarum
occurfus evitemus, hæc eadem absque Circuli descriptione effi-
cere expediet.

Ita-

Itaque si, ductâ A L Asymptotorum alterutri, ut F I, parallelâ, ad eandem Asymptoton ducatur A K, ita ut L A K angulus angulo L A G æqualis sit, & per K rectâ K O secans prædictam A L in L, ita ut angulus F K O angulo F G I æqualis sit: erit curva, efficiente I G, intervallo A L, ac directrice K O descripta, ea ipsa Hyperbola, quæ quæritur.

Ad Mechanicas porrò Hyperbolarum descriptiones non inutile fore iudicavimus paucis hîc ostendere, quo pacto vel *angulis mobilibus* rectis, vel ita ut *describens* ad *directricem* sit perpendicularis, quælibet Hyperbolæ in plano delineari queant.

Si itaque vel hoc, vel illo modo describenda sit in plano Hyperbola, cujus Asymptoti sint F S, F T, quamque contingat rectâ S T, utrinque Asymptotis terminata: Ductâ ab alterutro punctorum S



vel T rectâ, vel ad hanc, vel ad illam Asymptoton perpendiculari, uti T V, quam ad F T angulos rectos efficere supponimus, eidem T V per punctum I (nempe ita sumptum ut I F inter V F & S F media sit proportionalis) agatur æquidistans I G, quæ contingeret quoque Hyperbolam quæsitam¹, propterea quòd sit V F ad I F, hoc est², I F ad S F, uti³ T F ad G F. Ideoque descripto super eandem I G circulo I K G, qui tangat Asymptoton F T in G⁴, atque alteram secet in K, si per K & G ducatur rectâ K G O, eidemque occurrat ducta ab

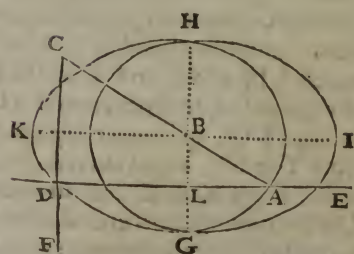
A, puncto medio tangentis I G, rectâ A L in L, quæ quidem A L vel ad eandem I G, vel ad ductam K O sit perpendicularis: erit Hyperbola, quæ efficiente I G, directrice K O, atque intervallo A L, ad eandem efficientem, dictamve directricem perpendiculari, describitur, juxta ea quæ modo exposita sunt, hæc ipsa, quæ delineanda proponitur.

Similiter & vel datis quibuslibet *angulis mobilibus*, vel

G g 3

ita

Recta linea, ut ABC , ad Polum B circulariter mota binis sui punctis A & C , in eadem utcunque assumptis (five B sit inter A & C , five C sit inter A & B), promoveat rectas ADE , DCF ,



Sumpto enim in eadem
curva puncto utcunque,
veluti D, applicentur ipsi
describentes ADE, DCF
in statione uti fuere, cum
per illarum intersectio-
nem descriptum est pun-
cti earum alterutra, veluti
GH, IK, ex. gr., ipsam
inferentia Circuli, qui per
eam itaque est * AB qua-
dratum ad BK qua-
dratum ad LH rectangulum ad LD
qua-

ctum D; noteturque porro punctum, ubi earum alterutra, veluti ADE, vel hanc vel illam ductarum GH, IK, ex. gr., ipsam GH, secat, ut in L. & sit GAH circumferentia Circuli, qui per motum puncti A describitur. Quoniam itaque est 1 AB quadratum ad BC quadratum, hoc est, GB quadratum ad BK quadratum, ut AL quadratum sive 2 GLH rectangulum ad LD qua-

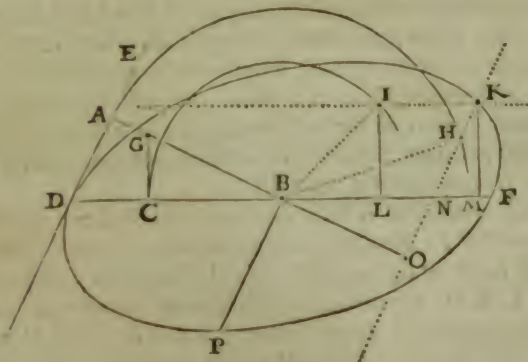
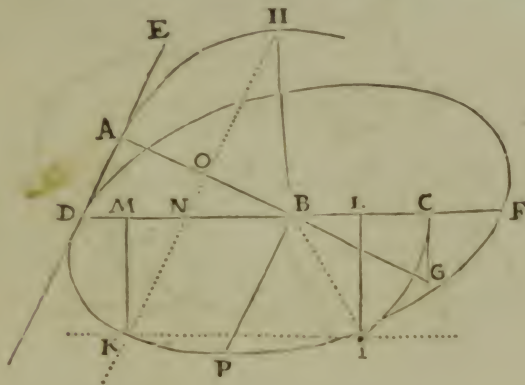
per 2 &
22 sexti.

² per 14 se-
cundi, vel
35 tertii.

quadratum: constat, curvam GKH, uti prædictum est, descri-
ptam Ellipsin esse, cujus axes sunt GH, IK. *per 13. lib.*

Manifestum autem est, si puncta A & C æqualiter à
B Polo distent, prædictam curvam Circuli circumfe-
rentiam fore.

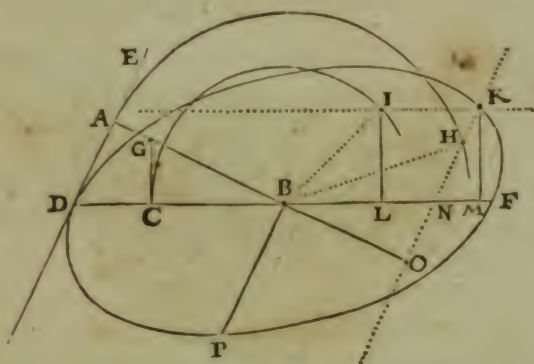
Non sit deinde ABC una linea recta, sed angulus quicunque,
sive obtusus, sive acutus ABC, sintque prædictæ rectæ DAE,



DCF in punctis A & C ita junctæ, ut, cum earum altera uni
cruri

& æquiangula triangula CBG & MNK, cum tam hoc quàm illud triangulo OBN simile sit: quare cum sit ¹ DB quadratum ad NB quadratum, ut AB quadratum, id est ² HB quadratum, ad OB quadratum, erit ³ per conversionem rationis DB quadratum ad DNF ⁴ rectangulum, sicut HB quadratum ad HO ⁵ quadratum, id est ⁶ uti BI quadratum ad IL quadratum, vel uti BC quadratum ad KM quadratum ⁷, id est ⁸ uti BG sive BP quadratum ad KN quadratum, & permutando ⁹ DB quadratum ad

¹ ob angulos ad C, O, & M rectos, ad B verò & N sive eisdem sive ad verticem. ² per 4 & 22 sexti. ³ ex hypothesi. ⁴ per Cor. 19 quinti. ⁵ per 5 secundæ. ⁶ per 47 primi. ⁷ per 4 & 22 sexti. ⁸ æqualis est enim BC ipsi BI, & IL ipsi KM. ⁹ per 4 sexti, propter triangula CBG & MNK æquiangula. ¹⁰ per 16 quinti.



BP quadratum, ut DNF rectangulum ad KN quadratum. Ac proinde Ellipsis est curva DKPF, intersectione uti prædictum est descripta ¹¹, cujus semi-diametri conjugatæ DB, BP; ideoque B centrum, ac DAE contingens Ellipsin in vertice D ¹².

¹¹ per 13 huius. ¹² per 2 Cor. 13 huius.

Notandum hic est, quòd si rectus foret ABC angulus, intersectione, uti prædictum est, non curvam, sed rectam lineam describi.

Quemadmodum autem Ellipsin, quæ superius per motum puncti in una eademque recta descripta fuit, nunc per duarum rectarum intersectionem delineavi-

Hh mus,

mus, ita & Parabola Hyperbolaque, quarum generationes solummodo per similes intersectiones in præcedentibus exposuimus, per motum puncti in una eademque recta describi possunt. At verò quoniam prædictarum curvarum generationes, ut jam ante quoque monuimus, infinitæ sunt, atque earum facillimas quidem ac maximè naturales à nobis jam propositas existimamus, hisce diutiùs inhærendum non videtur; itaque ad *Locorum Planorum*, *Solidorumq;* inventiones ac determinationes progredimur.



JOHANNIS DE WITT
ELEMENTA
CURVARUM
LINEARUM.
LIBER SECVNDVS.

CAPUT I.
PROPOSITIO GENERALIS.

IN omni quæstione, ubi indagandus proponitur Locus, siue is sit ad lineam rectam, siue ad curvam, suppositis duabus lineis rectis incognitis atque indeterminatis, datum vel assumptum angulum comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, devenitur ad Æquationem, assumptum quodlibet quæsitæ Loci punctum determinantem; in qua quidem æquatione, postquam ad simplicissimos terminos erit reducta, si neutra incognitarum ad duas pluresve dimensiones assurgat, hoc est, si neque in se, neque in alteram incognitam ducta seu multiplicata reperiatur, quæsitus Locus erit linea recta: At si earundem incognitarum altera ad quadratum ascendat, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram incognitam ducta sit, erit Locus quæsitus Parabola. Quòd si verò utraque ad quadratum ascendat, siue altera in alteram ducta in æquatione reperiatur (altiùs enim æquatio non assurgat, si de loco Plano Solidovè quæstio sit): erit Locus quæsitus vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circuli circumferentia.

Hh 2

Quo-

Quorum quidem omnium particularis determinatio, descriptio, & demonstratio variis modis fieri potest; at verò ex simplicissimis, generalissimisque aliquem annotasse suffecerit.

Ac primo quidem casu, cum neutra quantitatum incognitarum ad duas pluresve dimensiones ascendit, si earum una exprimitur per x , atque altera per y , potest æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci.

I. $y \propto \frac{bx}{a}$, sive (posito $a \propto b$) $y \propto x$.

II. $y \propto \frac{bx}{a} + c$, sive, posito, ut supra, $y \propto x + c$.

III. $y \propto \frac{bx}{a} - c$, sive $y \propto x - c$.

IV. $y \propto -\frac{bx}{a} + c$, sive $y \propto -x + c$.

Fiat autem earundem quantitatum incognitarum secundum regulam talis assumptio, ut initium unius, verbi gratiâ, ipsius x , certum sit & immutabile, utque eadem illa quantitas ex certo & immutabili illo initio in linea recta positione data intelligatur indefinitè extendi, altera verò indeterminatæ quoque longitudinis lineâ priori in extremitate incerta in dato vel assumpto angulo conjungi. Quibus quidem suppositis, ea, quæ prædicta sunt, sequentibus Theorematibus non incongruè proponi, determinari, ac demonstrari posse videntur.

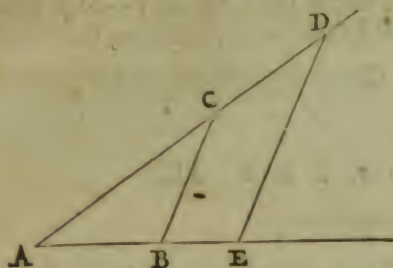
THEOREMA I.

Propositio I.

Si æquatio sit $y \propto \frac{bx}{a}$, erit locus quæsitus linea recta.

Sit enim ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Dein, sumpto in eadem AB puncto utcunque, veluti B, agatur BC in angulo

angulo ABC, ipsi dato vel assumpto æquali; ita ut eadem sit ratio interceptæ AB ad ductam BC, quæ est a cognita ad b cognitam.



hoc est, ut sit uti a ad b , ita AB ad BC. Denique per puncta A & C ducatur recta AC, indefinitè extensa, eritque hæc ipsa locus quæsitus.

Etenim assumpto in AC puncto utcumque, veluti D, ductâque DE in angulo DEA, dato

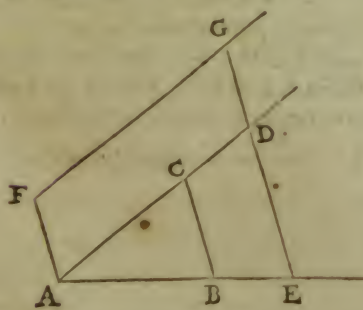
vel assumpto æquali, si eadem DE vocetur y , erit ^{per 29 primi.} ut AB ad BC, hoc est, ut a ad b , ita AE ad ED, hoc est, ita x ad y . Et ^{per 4 sexti.} fit $a y \propto b x$, hoc est, dividendo utrinque per a , erit $y \propto \frac{b x}{a}$. ^{per 16 sexti.}

Quare cum punctum D utcumque sumptum sit in linea AC, erit eadem de omnibus aliis lineæ AC punctis demonstratio, ac proinde ipsa AC locus est quæsitus. Atque ita non solum Theorematis propositi veritas demonstrata, sed & Locus quæsitus determinatus est.

THEOREMA II.

Propositio 2.

Si æquatio sit $y \propto \frac{b x}{a} + c$, erit Locus quæsitus linea recta.



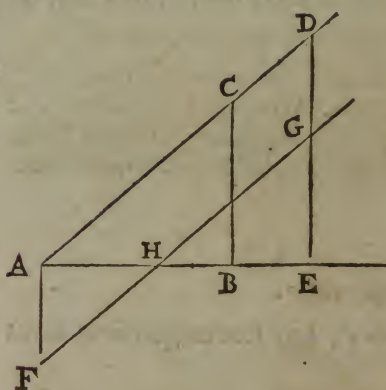
Positis, factisque, ut supra, agatur insuper ex A recta AF ipsi BC parallela, atque ad easdem cum ea partes, quæ sit æqualis c cognita. Et ex F ductâ FG parallelâ AC, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in FG puncto utcumque, veluti G, ductâque GE in angulo AEG, dato ^{Hh 3}

¹ per 29 pri-
mi, & 4
sexti.
² per 16
sexti.

Propositio 3.

Si æquatio sit $y \propto \frac{b x}{a} - c$, erit Locus quæsitus linea
recta.



Positis factisque ut in Theoremate 1^{mo}, agatur insuper ex A recta AF, ipsi BC parallela, atque ad oppositas cum ea partes, quæ sit æqualis & cognita. Et ex F ductâ iterum FG ipsi AC parallelâ, secante rectam AB in H, dico HG esse Locum quaesitum.

Sumpto enim in eadem puncto utcunque veluti G, ductâque GE in an-

gulo A E G, dato vel assumpto æquali, quæ producta secet A C in D, si eadem G E vocetur y , erit $E D \propto y + c$. Jam verò est ex constructione, ut A B ad B C, ita A E ad E D, hoc est, ut a ad b , ita x ad $y + c$: ac propterea $ay + ac \propto bx$, vel $ay \propto bx - ac$, adeoque, factâ divisione per a , $y \propto \frac{bx}{a} - c$. Quod est propositum.

3 per 29
primi, &
4 sexti.
4 per 16
sexti.

THEO-

exinde binæ insuper formulæ nascuntur, quæ huc referri debent: nimirum,

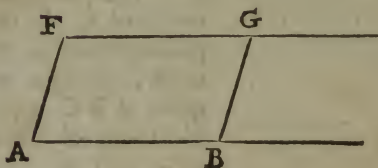
1. $y \propto c$, vel

2. $x \propto c$.

THEOREMA V.

Propositio 5.

Si æquatio sit $y \propto c$, Locus quæsitus est linea recta.



Sit quantitatis x , quæ per operationem evanuit, initium immutabile punctum A , atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur. Deinde ex A ductâ $AF \propto c$,

faciente cum AB angulum, ipsi dato vel assumpto aut ejusdem ad binos rectos supplemento æqualem, si ex F agatur FG ipsi AB parallela, dico eandem FG esse Locum quæsitum.

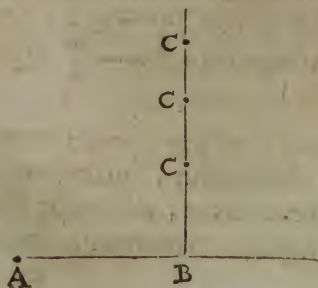
¹ per 34
primi.

Etenim assumpto in FG puncto utcumque, veluti G , ductâque GB ipsi AF parallelâ, apparet eandem GB omnesque ipsi æquidistantes ¹ rectæ AF fore æquales, hoc est, esse $y \propto c$. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VI.

Propositio 6.

Si æquatio sit $x \propto c$, erit Locus quæsitus linea recta.



In linea AB , quæ, ut supra, pro x concepta sit, sumatur à puncto A longitudo AB æqualis c cognitæ, atque ex B in dato vel assumpto angulo ducatur recta BC . dico eandem BC , indefinitè productam, esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in eadem puncto

Et utique, veluti C, erit ex hypothesi CB cum priore AB comprehendens angulum ABC dato vel assumpto æqualem, poteritque proinde eadem CB vocari y. At verò est ex constructione, & remanet semper AB, hoc est, x. Quod est propositum.

CAPUT II.

Porro secundo casu, supra expresso, cum nempe in æquatione, ad simplicissimos terminos reducta, quantitatum incognitarum altera ad quadratum ascendit, altera verò non item, sed neque in se, neque in alteram quantitatem incognitam ducta reperitur: poterit æquatio ad aliquam sequentium formularum reduci

$$\begin{array}{l} \text{I. } yy \propto ax \\ \text{II. } yy \propto ax + bb \\ \text{III. } yy \propto ax - bb \\ \text{IV. } yy \propto -ax + bb \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I. } yy \propto ax \\ \text{II. } yy \propto ax + bb \\ \text{III. } yy \propto ax - bb \\ \text{IV. } yy \propto -ax + bb \end{array}} \right\} \text{vel conversim} \left\{ \begin{array}{l} ay \propto xx \\ ay + bb \propto xx \\ ay - bb \propto xx \\ bb - ay \propto xx \end{array} \right.$$

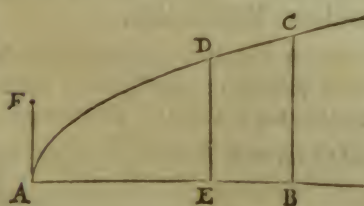
Supponendo y & x esse quantitates incognitas, vel ab initio conceptas, vel postmodum assumptas, ut mox latius explicabitur.

THEOREMA VII.

Propositio 7.

Si æquatio sit $yy \propto ax$, vel conversim $ay \propto xx$: erit Locus quæsitus Parabola.

Sit ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem illa x per rectam AB indefinitè se extendere intelligatur, & sit datus



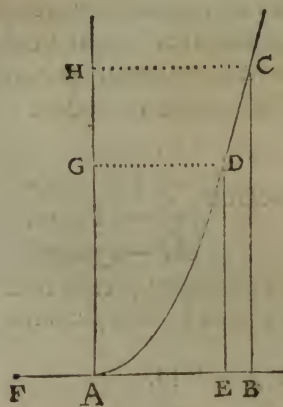
vel assumptus angulus æqualis angulo ABC; Assumatur primò eadem AB ut Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant cum ipsa angulos æquales dato vel assumpto angulo ABC, cuiusque latus rectum AF sit

Ii

¹ per 12 Coroll. primi, ² per 4 Coroll. secundi huius. sit æquale a cognitæ. Dico Parabolam $A D C$, quæ ¹ per prædictæ diametri verticem A descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\propto a$, esse Locum quæsitum.

Sit enim in eadem curva $A D C$ assumptum punctum utcumque, veluti D , ductâque $D E$ in angulo $A E D$ dato vel assumpto æquali, si ipsa $D E$ vocetur y , erit, ex natura Paraboles ², quadratum ex $E D \propto F A E$ rectangulo, hoc est, $yy \propto ax$. Quod erat propositum.

³ per 1 primi huius.



Ad demonstrationem autem secundæ huius Theorematis partis iisdem ut supra suppositis, ducenda est ex A puncto recta $A H$ ipsi $B C$ parallela, atque eadem $A H$ assumenda pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo $A B C$ seu $A H C$ æquales, ac cætera, ut supra, eritque Parabola $A D C$ Locus quæsitus.

Est enim ³ quadratum ex $G D$ sive $A E$ quadratum æquale rectangulo sub $F A$ & $A G$, seu $F A$ & $E D$, id est, $xx \propto ay$. Quod erat demonstrandum.

T H E O R E M A V I I I.

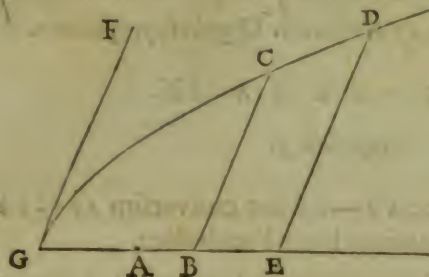
Propositio 8.

Si æquatio sit $yy \propto ax + bb$ aut conversim $ay + bb \propto xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Sit ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem illa x per rectam $A B$ indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus æqualis angulo $A B C$. Deinde producat $A B$ versùs A usque ad G , ita ut sit $A G \propto \frac{bb}{a}$; assumptâque $G B$ pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto angulo $A B C$, cujusque latus rectum

rectum GF sit æquale a cognita: dico Parabolam GCD, quæ

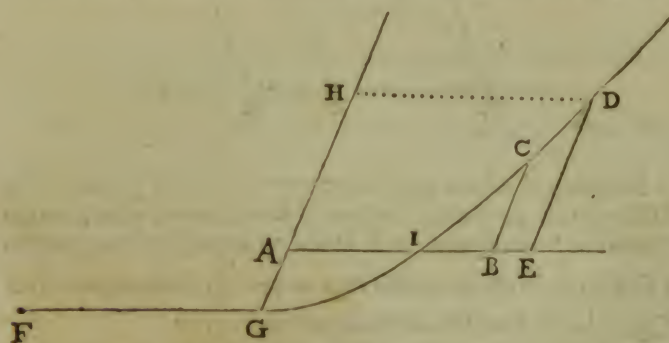
per prædictæ diametri verticem G descripta sit, habeatque latus rectum eidem diametro correspondens $\propto a$, esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductâque DE in angulo AED, dato vel

assumpto æquali, si ipsa DE vocetur y , quoniam GE sive AE + AG est $\propto x + \frac{bb}{a}$, atque ex natura Paraboles ^{per 1. primus hujus.} quadratum ex ED \propto rectangulo sub FG & GE, erit $yy \propto ax + bb$. Quod primò erat demonstrandum.

Ad explicationem verò secundæ hujus Theorematidis partis iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela; eâdemque productâ versùs A usque ad G, ita ut AG sit $\propto \frac{bb}{a}$, di-



co, si ad GH diametrum latere recto GF $\propto a$ Parabola describatur ut GC, quæ secet rectam AB in I, curvam ID esse Locum quæsitum.

Est enim ^{per 1. primus hujus.} ex natura Paraboles rectangulum sub FG & GH con-

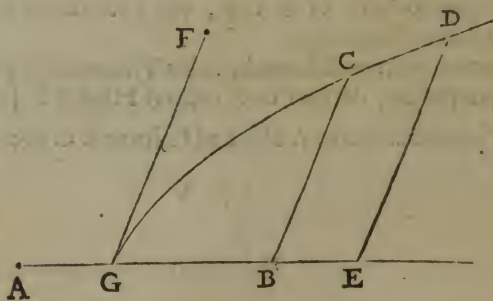
252 ELEM. CURVARUM
 contentum æquale quadrato ex HD seu AE, ac proinde, quoniam GH, sive DE + AG, $\propto y + \frac{bb}{a}$, atque FG $\propto a$, erit, factâ debitâ multiplicatione, $ay + bb \propto xx$. Quod est propositum.

THEOREMA IX.

Propositio 9.

Si æquatio sit $yy \propto ax - bb$ aut conversim $ay - bb \propto xx$, erit Locus quæsitus linea Parabolica.

Suppositis iisdem, quæ in præcedenti Theoremate, auferatur ab AB recta AG $\propto \frac{bb}{a}$, fiantque cætera, ut ibidem dictum est: dico curvam GCD esse Locum quæsitum.



Sumpto enim in ea puncto utcumque, veluti D, demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y , erit ex natura Parabolæ ^{per 1^{am} hujus.} quadratum ex ED seu yy æquale rectangulo sub FG & GE, id est, producto ex a in $x - \frac{bb}{a}$, nimirum, $ax - bb$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

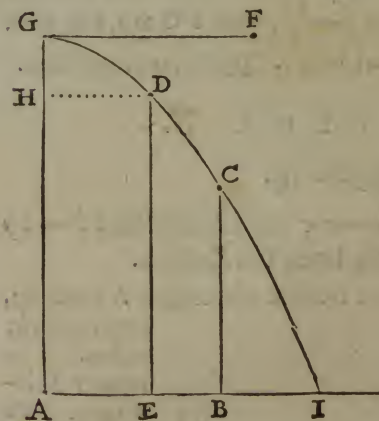
Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ducatur ex A recta AH ipsi BC parallela, atque ab ea subductâ AG $\propto \frac{bb}{a}$, sumatur GH pro diametro, &c. ut supra, dico curvam GCD fore Locum quæsitum.

Est

pro diametro sectionis, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos æquales dato vel assumpto ABC , aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Quo facto, si per prædictæ diametri verticem G versus A Parabola describatur, cujus latus rectum GF eidem diametro correspondens sit $\propto a$, quæque Parabola rectam AI ipsi BC parallelam secet in I : dico ejusdem Parabolæ portionem, inter verticem G & punctum intersectionis I interceptam, nempe curvam GCI , esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcumque, veluti D , demissâque DE ipsi CB parallelâ, si eadem DE vocetur y , cum ^{per 1^{am} hujus.} ex natura Parabolæ quadratum ipsius DE sit æquale rectangulo sub FG & GE , & GE five $AG - AE$ sit $\propto \frac{bb}{a} - x$, ac $FG \propto a$, factâ debitâ multiplicatione, erit $yy \propto bb - ax$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

^{per eandem.}



Ad explicationem autem secundæ hujus Theorematis partis, iisdem ut supra positis, ex A ducatur AG ipsi BC parallela atque $\propto \frac{bb}{a}$, assumaturque GA pro diametro, &c. per omnia, ut supra, excepto quod punctum intersectionis I sit in recta AE .

Cum enim ductâ DH ipsi AB parallelâ ^{per eandem.} ex natura Parabolæ rectangulum sub FG & GH contentum sit æquale quadrato ex HD seu AE , sitque

GH five $AG - ED \propto \frac{bb}{a} - y$, atque $FG \propto a$, factâ multiplicatione, ut decet, erit $bb - ay \propto xx$. Quod erat propositum.

Regula

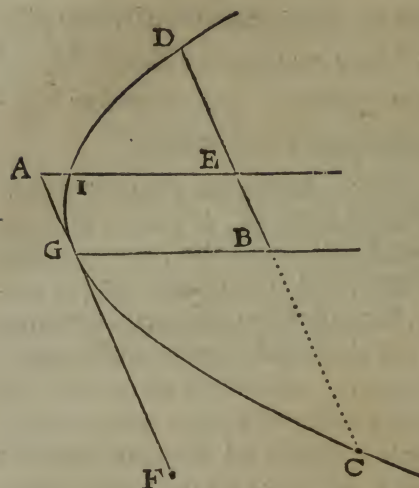
Regula universalis, modusque reducendi omnes æquationes, quæ ex convenienti operatione producuntur, cum Locus quesitus est Parabola, ad aliquem quatuor casuum, præcedentibus totidem Theorematibus jam explicatorum.

Si contingat ut quantitas incognita, quæ in æquatione ad duas dimensiones ascendit, in eadem quoque inveniatur unius dimensionis, cum alia, sive cognita, sive incognita quantitate, vel etiam cum utraque planum aliquod faciens, loco ejusdem assumenda est alia, vel ipsam excedens, vel ab ea deficiens dimidio quantitatis, quacum illa planum, uti dictum est, constitucere reperitur, pro diversa dicti plani signo $+$ vel $-$ affectione. Quo opere ipsa æquatio ad aliquem quatuor præcedentium casuum reducetur, ita ut ei convenientem lineam Parabolicam determinare, per ea quæ superius sunt explicata, haud difficile sit.

Exempla reductionis æquationum ad formulam Theorematum VII.

Si æquatio sit $yy + 2ay \propto bx - aa$; assumpto, juxta Regulam, $z \propto y + a$, erit $z - a \propto y$. Hinc si ubique in æquatione loco ipsius y substituatur $z - a$, ejusdemque quadratum loco yy : habebitur $zz - 2az + aa, + 2az - 2aa \propto bx - aa$, hoc est, omittis his quæ sese mutuo tollunt, erit $zz \propto bx$. Unde statim apparet æquationem esse reductam ad formulam Theorematum VII, ac proinde Locum quesitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x intelligatur se ab A per rectam AE indefinite extendere; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAF . Deinde, quoniam z est $y + a$, si y supra lineam AE exurgere intelligatur, ducenda est infra eam recta GB ipsi AE parallela, ita

ita ut pars rectæ AF, omniumque ipsi parallelarum, intercepta



inter AE & GB, veluti AG, æquetur a cognita. Porro prædicta GB assumenda est ut Parabolæ diameter, ad quam si per ejusdem verticem G, existente GF latere recto, ipsi diametro GB correspondente, $\propto b$ Parabola describatur, secans rectam AE in I: dico curvam ID indefinitè versùs D productam esse Locum quæsitum.

Etenim assumpto in eadem curva puncto utcunque, veluti D,

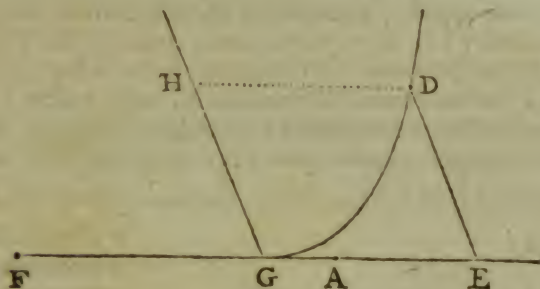
ductâque DE ipsi AF parallelâ, si eadem DE vocetur y , producatûrque donec prædictæ diametro GB occurrat in B: erit ex constructione intercepta EB $\propto a$, ac proinde tota DB $\propto y + a$, hoc est, χ . Quare cum ex natura Parabolæ quadratum ex DB æquetur rectangulo sub FG & GB, vel FG & AE: erit quoque $\chi\chi \propto bx$, sive, restituto $y + a$ loco χ , $yy + 2ay + aa \propto bx$, id est, $yy + 2ay \propto bx - aa$. Quod demonstrandum determinandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $yy - 2ay \propto bx - aa$, factâ assumptione secundum Regulam, atque operatione, ut supra; deventum fuisset ad eandem æquationem, nimirum, $\chi\chi \propto bx$. Sed quoniam χ eo casu juxta Regulam assumenda fuisset $\propto y - a$, idcirco quoque diameter GB (iisdem ut supra positis) non infra, sed supra rectam AE cecidisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo expedienda fuissent.

Si verò æquatio sit $by - aa \propto xx + 2ax$, quæ est conversa superius exposita, assumpto juxta Regulam $v \propto x + a$, erit $v - a \propto x$. Quare si loco ipsius x in æquatione substituatur $v - a$, atque
hujus

hujus quadratum loco xx : erit $by - aa \propto vv - 2av + aa$,
 $+ 2av - 2aa$, hoc est, omittis iis, quæ se mutuò tollunt, erit
 $by \propto vv$.

Unde statim apparet, reductam esse æquationem ad formulam
 prædicti Theorematis septimi conversim, ac proinde Locum
 quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem
 esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A,



intelligaturque eadem x à prædicto puncto A per rectam AE in-
 definite se extendere, sitque datus vel assumptus angulus, quem
 comprehendunt y & x , æqualis angulo AGH vel FGH. Deinde,
 quoniam v æquatur $x + a$, producenda est recta AE versus A
 usque ad G, ita ut AG sit $\propto a$; & ex G ducenda est GH, faciens
 angulum EGH vel FGH dato vel assumpto angulo æqualem,
 ipsaque GH sumenda est pro Parabolæ diametro, ad quam si per
 ejus verticem G atque latere recto FG $\propto b$ Parabola describatur,
 ut GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE
 ipsi HG parallelâ, si eadem DE vocetur y , cum GE sit $\propto x + a$
 seu v , atque ex natura Parabolæ FGH rectangulum \propto quadrato
 ex HD sive GE, erit $by \propto vv$, sive, restituto $x + a$ loco v , by
 $\propto xx + 2ax + aa$, seu $by - aa \propto xx + 2ax$. Quod determi-
 nandum, demonstrandumque erat.

Quòd si æquatio fuisset $by - aa \propto xx - 2ax$, eadem per omnia
 mutatis mutandis secundum Regulam instituenda fuisset opera-
 tio, cecidissetque eo casu punctum G inter A & E.

K k

Eodem

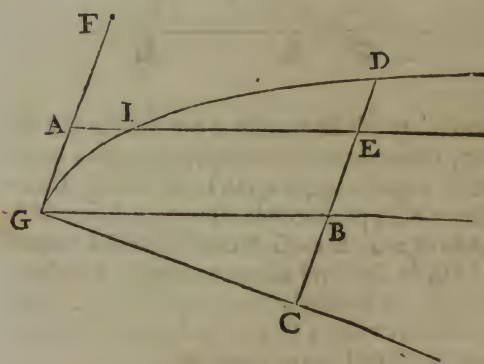
Eodem modo si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + cy \propto bx - \frac{bbxx}{aa} - cc$,

assumpto juxta Regulam $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$: erit $y \propto z - \frac{bx}{a} - c$.

Quo substituto in locum ipsius y , ejusdemque quadrato loco yy , expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis sequentem formam induta erit superior æquatio:

$zz \propto \frac{2bc}{a}x + bx$, aut $zz \propto dx$, si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d .

Unde iterum apparet, æquationem esse reductam ad formulam Theorematis VII, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam. Ad cujus specificam determinationem esto in sequenti figura ipsius x initium immutabile punctum A, atque eadem x ab A puncto per rectam A E indefinitè se extendere intelligatur, sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A F vel E A G. Deinde quoniam z est $\propto y + c + \frac{bx}{a}$,



si y supra lineam A E exurgere intelligatur, veluti E D, ducenda primum est infra eandem recta GB ipsi parallela, ita ut partes rectæ F G omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & G B interceptæ, veluti A G, E B, æquen-

tur c cognitæ. Quo peracto, cum quævis recta, quæ possit esse y , ad rectam G B producta, ut, exempli gratiâ, D B, sit $\propto y + c$, oportet ipsi adhuc adjungere $\frac{bx}{a}$, ut fiat æqualis z assumptæ.

Quare, cum G B seu A E indefinitè sumpta sit $\propto x$, si ex G juxta I Theorema hujus libri infra eandem G B recta ducatur, ut G C; ita ut omnium ipsi G F parallelarum partes inter G B & G C interceptæ, veluti B C, ad partes ipsius G B inter G & dictas parallelas

parallelas interceptas, veluti BG, eandem rationem habeant, quæ est inter b & a . Quod ipsum ut fiat, statuatur ut a ad b , ita GB ad BC: eritque $BC \propto \frac{bx}{a}$. Eodem modo rectæ omnes ipsi BC parallelæ, quæ à GB ad GC ducuntur, erunt $\propto \frac{bx}{a}$. Atque ita recta quælibet supra AE exsurgens, quæ possit esse y , postquam ad rectam GC erit producta, ut, exempli gratiâ, DC, erit $\propto y + c + \frac{bx}{a}$ seu ζ . Hujus igitur quadratum cum debeat esse $\propto dx$, statim inde apparet, si Parabola descripta foret ad diametrum GC, cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula, sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem & ordinatim applicatas interceptis, contenta, forent $\propto dx$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC, aliarumque similium, cognita sit, nempe, ut a ad b ; sitque itidem notus angulus GBC, sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto EAF: erit propterea quoque nota ratio GB ad GC, aliarumque similium, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Hinc cum GB seu AE indefinitè sumpta exprimat per x , erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\propto \frac{ex}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dx , idem quoque æquationis terminus dx per $\frac{ex}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est: ac proinde per eandem divisionem cognoscitur quæsitum latus rectum æquari $\frac{ad}{e}$. Sumptâ ergo GF $\propto \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum GC, ut supra dictum est, describatur Parabola GID, secans rectam AE in I: dico curvam ID fore Locum quæsitum.

Atque hic, ut & in aliis similibus exemplis obiter notandum, si Parabola descripta prædictam AE non secaret, id certo indicio fore, quæstionem propositam, per quam legitimâ operatione ad supra expressam æquationem perventum fuerit, ejus esse conditionis, ut Locus ad indagandum propositus sui quidem naturâ

Kk 2

linea

linea Parabolica existat; sed quòd nulla tamen quæstioni satisfaciens describi possit, cum propositæ quantitates, eo, ut petitur, modo, conjungi nequeant.

Ad demonstrationem autem eorum, quæ supra dicta sunt, sumatur in curva ID punctum utcunque, veluti D , ductâque DE ipsi FG parallelâ, quæ protracta secet rectam GB in B , occurratque diametro GC in C , si DE vocetur y , cum EB seu AG sit $\propto c$, & $BC \propto \frac{bx}{a}$, erit tota $DC \propto y + c + \frac{bx}{a}$, hoc est, ζ . Cumque ex natura Parabolæ quadratum ex $DC \propto FG \cdot C$ rectangulo, erit quoque ex antedictis $\zeta \zeta \propto dx$. Ac proinde substitutis aut restitutis $y + c + \frac{bx}{a}$ loco ζ , itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d , & ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, erit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto bx - \frac{b^2xx}{aa} - cc$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Sin autem æquatio fuisset $yy - \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto bx - \frac{b^2xx}{aa} - cc$, factâ assumptione secundum Regulam atque operatione uti decet, ad eandem æquationem perventum fuisset; sed quoniam ζ juxta assumptionem eo casu faciendam fuisset æqualis $y - \frac{bx}{a} - c$, idcirco quoque suppositis, ut ante, rectâ GB non infra sed supra rectam AE , ut & GC non infra sed supra eandem GB ducenda fuisset, cæteraque omnia eodem quo supra modo fuissent expedienda.

Si verò æquatio sit $by - \frac{b^2yy}{aa} - cc \propto xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$, quæ est conversa superius exposita, assumpto juxta Regulam $v \propto x + \frac{by}{a} + c$, erit $x \propto v - \frac{by}{a} - c$. Unde substituto hoc valore in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx , expunctisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, superior æquatio sequenti formâ induta erit $\frac{2bc}{a}y + by \propto vv$, aut (si loco $\frac{2bc}{a} + b$ substituatur d) $d y \propto vv$. Id quod rursus arguit æquationem propositam reductam esse ad formulam prædicti Theorematibus VII conversam, ac proinde Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad.

cujus latus rectum GF ita esset assumptum, ut rectangula contenta sub eodem latere recto & diametri portionibus, inter verticem G & ordinatim applicatas interceptis, forent $\propto dy$, eandem illam Parabolam fore Locum quæsitum. At verò cum ratio rectæ GB ad rectam BC aliarumque similium cognita sit, nimirum, ut a ad b ; sitque itidem notus angulus sub iisdem comprehensus, utpote æqualis dato vel assumpto EAH : erit quoque <sup>per 6 sex-
ti.</sup> ratio ipsius GB ad GC aliarumque similium cognita, quæ sit ut a cognitæ ad e cognitam. Quocirca si GB sive ED indefinitè sumpta exprimatur per y , erit GC itidem indefinitè sumpta, hoc est, omnis diametri portio, inter verticem & ordinatim applicatas intercepta $\propto \frac{ey}{a}$. Quæ cum in latus rectum ducta producere debeat æquationis terminum dy , idem quoque æquationis terminus dy per $\frac{ey}{a}$ divisus ut prædictum latus rectum restituat necesse est. ac proinde factâ eâdem divisione indicabit quotiens latus rectum quæsitum fore $\frac{ad}{e}$. Hinc, sumptâ $GF \propto \frac{ad}{e}$ pro latere recto, si ad diametrum GC inventam, ut supra dictum est, describatur sectio Parabolica GID , secans rectam AH in I : dico curvam ID fore Locum quæsitum.

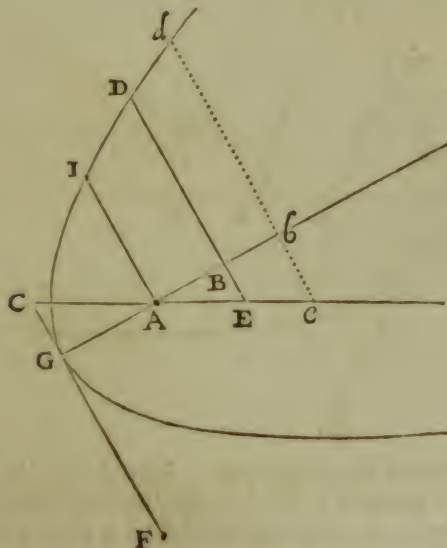
Sumpto enim in eadem puncto utcumque, veluti D , ductâque DE ipsi AH , ut & DC ipsi AE parallelâ, quæ quidem DC secet rectas AH & GB in punctis H & B , occurratque diametro GC in puncto C : erit $AE \propto x \propto DH$; $ED \propto y \propto GB$; AG & $HB \propto c$; $BC \propto \frac{by}{a}$, ideoque tota $DC \propto x + c + \frac{by}{a}$, hoc est, v . Cumque ex natura Parabolæ rectangulum FGC sit æquale quadrato DC : erit, factâ multiplicatione $\frac{ad}{e}$ in $\frac{ey}{a}$, atque v in se ipsam, $dy \propto vv$. Et substitutis aut restitutis $x + c + \frac{by}{a}$ loco v , itemque $\frac{2bc}{a} + b$ in locum ipsius d , atque ablatis quæ propter æqualitatem se invicem tollunt, ordinatisque omnibus, ut decet, $by - \frac{bbyy}{aa} - cc \propto xx + \frac{2byx}{a} + 2cx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

De cæteris autem casibus, ad prædictam formulam spectantibus, supervacuum fuerit plura exponere, cum ex prædictis facile expli-

explicari, determinari, ac demonstrari queant; observatâ solummodo diversâ linearum positione, quæ ex signorum + & — differentia oriri debet, cumque omnes similium locorum casus mox per generalem Regulam sim exhibiturus.

*Exempla reductionis aequationum ad formulam Theorema-
ris VIII.*

Si æquatio sit $yy - \frac{bxy}{a} x - \frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$, assumpto juxta Regulam $z \propto y - \frac{bx}{2a}$, erit $y \propto z + \frac{bx}{2a}$. quo substituto in locum ipsius y , & ejusdem quadrato loco yy , omissisque iis, quæ se invicem tollunt, atque omnibus ritè ordinatis, æquatio superior sequenti formæ erit induta: $zz \propto bx + dd$.



Unde apparet, eandem esse redu&am ad formulam Theore-
matis VIII, ac proinde Locum qua&itum esse Parabolam. Ad
cujus particularem descriptionem esto in adjuncta figura ipsius x
initium immutabile punctum A, atque eadem x à dicto puncto A
per

AB versus A producat ad G, ita ut rectangulum sub prædicto latere recto & parte GA contentum sit $\propto dd$, rectam GB quæsitam fore diametrum, ejusque verticem prædictum G punctum: ac proinde & dd per prædictum latus rectum, hoc est, per $\frac{2ab}{e}$, divisum æquari longitudini GA, ideoque GA fore $\propto \frac{dde}{2ab}$. Quare si diametro GB & latere recto GF $\propto \frac{2ab}{e}$ in dato angulo Parabola describatur GDd, secans AI ipsi ED parallelam in I: dico curvam IDd fore Locum quæsitum.

Verùm obiter hic quoque notandum venit, prædictum verticem G etiam inveniri hoc pacto: si nempe EA producat ad C, ita ut AC sit $\propto \frac{dd}{b}$, ac deinde per punctum C ipsi DE parallela ducatur CG, occurrens productæ AB in G: erit enim in eodem illo concursus puncto vertex quæsitus.

Demonstratio.

Sumatur in prædicta curva punctum utcunque, veluti D, ductaque DE in angulo AED, dato vel assumpto æquali, secante diametrum GB in B: erit, ex constructione, BE $\propto \frac{bx}{2a}$; ideoque, si ED vocetur y , erit DB $\propto y - \frac{bx}{2a}$ seu z ; FG $\propto \frac{2ab}{e}$, GA $\propto \frac{dde}{2ab}$; AB $\propto \frac{ex}{2a}$, totaque GB $\propto \frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$. At cum ex proprietate Parabolæ DB quadratum sit æquale rectangulo FGB, erit, factâ multiplicatione ipsius z in se ipsam, atque $\frac{2ab}{e}$ in $\frac{dde}{2ab} + \frac{ex}{2a}$, $zz \propto dd + bx$. Unde substituto $y - \frac{bx}{2a}$ loco z , obtinebitur $yy - \frac{bxy}{a} + \frac{bbxx}{4aa} \propto bx + dd$, id est, $yy - \frac{bxy}{a} \propto -\frac{bbxx}{4aa} + bx + dd$. Quod erat demonstrandum.

Quomodo autem pro casu hujus exempli converso Parabola describenda sit, ex comparatione ejusdem cum antedictis facile est colligere.

Si æquatio fuerit $\frac{bey}{a} + by - \frac{bby}{aa} + \frac{1}{4}ee \propto xx + \frac{2byx}{a} - ex$,
Ll assum-

assumpto juxta Regulam $v \propto x + \frac{by}{a} - \frac{1}{2}c$, erit $x \propto v - \frac{by}{a} + \frac{1}{2}c$.
 quo substituto in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx ,
 ablatisque iis, quæ se invicem destruunt, atque omnibus ritè or-
 dinatis, æquatio superior sequenti formâ erit induta

$$by + \frac{1}{2}cc \propto vv.$$

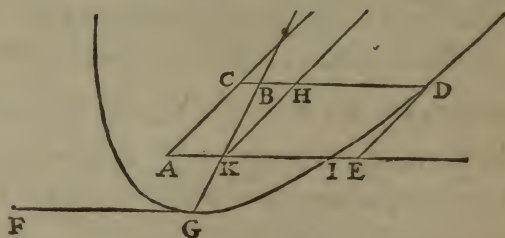
Unde apparet eandem esse reductam ad formulam prædicti
 Theorematis VIII conversum, ac proinde Locum quæsitum esse
 Parabolam. Cujus specifica determinatio (suppositis, ut in adjun-
 cta figura, AE indefinitè assumptam esse quantitatem incogni-
 tam x , atque cum altera y constituere angulum æqualem angulo
 EAC vel ejusdem ad binos rectos supplemento) quoniam ex jam
 ante explicatis quasi sponte profluit, idcirco eam adjunctâ figurâ
 breviter indicasse suffecerit.

Determinatio Loci.

AE indefinitè $\propto x$.

ED omnesque ipsi parallelæ $\propto y$.

$AK \propto \frac{1}{2}c \propto CH$, quia KH parallela AC .



Ut a ad b , ita KH seu y ad HB : unde HB fit $\propto \frac{by}{a}$, & $DB \propto x - \frac{1}{2}c + \frac{by}{a} \propto v$.

Ut a ad e , ita KH seu y ad KB : unde KB (in qua diameter) fit $\propto \frac{ey}{a}$.

by divisum per $\frac{ey}{a}$, reddit $\frac{ab}{e}$: unde latus rectum FG fit $\propto \frac{ab}{e}$.
 $\frac{1}{2}cc$, nempe terminus æquationis in totum cognitus, di. isus per $\frac{ab}{e}$

$\frac{ab}{c}$, nempe per latus rectum, reddit $\frac{ccc}{2ab}$; unde K G fit $\propto \frac{ccc}{2ab}$, atque G B $\propto \frac{ccc}{2ab} + \frac{ey}{a}$.

Demonstratio.

Rectangulum FGB \propto BD quadrato, ergo $\frac{1}{2}cc + by \propto yy$, vel $by \propto yy - \frac{1}{2}cc$, hoc est, $by \propto xx + \frac{2byx}{a} + \frac{bby}{aa} - cx - \frac{bcy}{a} + \frac{1}{2}cc$
 $- \frac{1}{2}cc$.

Quocirca deletis delendis, factâque decenti transpositione, fiet $\frac{bcy}{a} + by - \frac{bby}{aa} + \frac{1}{2}cc \propto xx + \frac{2byx}{a} - cx$. Quod erat propositum.

Exemplum reductionis aequationum ad formulam Theorematis IX.

Sit æquatio $yy + \frac{bxy}{a} - cy \propto ax - \frac{bbxx}{4aa} - cc$. Assumatur juxta Regulam $z \propto y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}c$, eritque $y \propto z - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}c$. Quo substituto in locum ipsius y , & ejus quadrato loco yy , fiet æquationis termini, ut sequitur: $zz \propto ax - \frac{bzx}{2a} - \frac{1}{2}cc$. Facilitatis ergo pro $a - \frac{bc}{2a}$ scribatur d , supponendo a esse majorem quam $\frac{bc}{2a}$, eritque æquatio $zz \propto dx - \frac{1}{2}cc$. Et apparet eandem reductam esse ad formulam Theorematis IX, ac propterea Locum quæsitum esse Parabolam, quàm ex iis, quæ jam explicata sunt, determinare ac describere facillimum erit; ut ex sequenti figura iisque quæ super eadem breviter annotata sunt, colligere licebit.

Determinatio Loci.

Sit initium immutabile ipsius x punctum A.

A E indefinitè $\propto x$.

E D omnesque ipsi parallelæ $\propto y$.

E A K vel A E D, angulus quem x & y comprehendere debent.

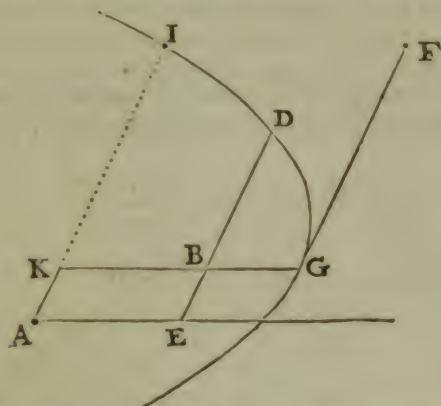
L I 2

A K

*Exempla reductionis æquationum ad formulam
Theorematis X.*

Si æquatio sit $ay - yy \propto bx$, five, quod idem est, $yy - ay + bx \propto 0$, assumpto juxta Regulam $z \propto y - \frac{1}{2}a$, erit $y \propto z + \frac{1}{2}a$. Quo substituto in locum ipsius y , & ejusdem quadrato loco yy , remanebit $zz \propto \frac{1}{4}aa - bx$. Unde apparet, eandem esse reductam ad casum Theorematis X, ideoque per ea, quæ ibidem sunt demonstrata, Locum quæsitum esse Parabolam.

Ad cujus specificam determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile punctum A, eademque x se indefinitè ab A versùs E extendere intelligatur; sit autem datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK,



aut ipsius ad binos rectos complemento. Deinde, quoniam z assumpta est $\propto y - \frac{1}{2}a$, si y supra rectam AE exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta KG ipsi AE parallela; ita ut AK omnesque ipsi æquidistantes inter AE & KG interceptæ sint $\propto \frac{1}{4}a$. Quo facto, si juxta Regulam fiat $KG \propto \frac{aa}{4b}$, eademque sumatur pro Parabolæ diametro, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi AK parallelæ, cujusque latus rectum FG sit. $\propto b$: erit ipsius portio descripta GDI, quæ inter verticem G & productam AK intercipitur, Locus quæsitus.

Ll 3

Etenim

AC, CG, cognitum angulum C comprehendentium, utpote dato vel assumpto aut ejusdem ad duos rectos supplemento æqualem, cognita item sit ratio, quam habet AC ad AG, quæ sit ut a ad e ; erit, AC existente $\propto \frac{ee}{a}$, AG $\propto \frac{eee}{ad}$. Per quam si terminus æquationis, in totum cognitus, nimirum ee , dividatur, oriatur $\frac{ad}{e}$ pro latere recto. Ac proinde si fiat GF $\propto \frac{ad}{e}$, erit GF latus rectum quæsitæ Parabolæ, diametro CA correspondens; atque iccirco si ad dictam diametrum, dictumque latus rectum Parabola describatur, ut GDI, secans AE in I: dico IDG curvam esse Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductisque DE ipsi AH, ac DBH ipsi AE parallelis, si eadem DE exprimat per y , erit quoque AH $\propto y$. Cumque sit ut AC ad CG, id est, ut a ad b , ita AH ad HB: erit HB $\propto \frac{by}{a}$, ideoque cum DH seu AE sit $\propto x$, erit DB $\propto x - \frac{by}{a}$ seu v . Similiter cum sit ut AC ad AG, hoc est, ut a ad e , ita AH seu y ad AB: erit AB $\propto \frac{ey}{a}$, & GA — AB seu GB $\propto \frac{eee}{ad} - \frac{ey}{a}$. Hinc cum ex natura Paraboles rectangulum FGB sit æquale quadrato ex BD, erit, factâ multiplicatione ipsius FG seu $\frac{ad}{e}$ in GB seu $\frac{eee}{ad} - \frac{ey}{a}$, & ipsius BD seu v in se ipsam, $ee - dy \propto vv$. Hoc est, restituto $x - \frac{by}{a}$ loco v , erit $ee - dy \propto xx - \frac{2byx}{a} + \frac{bbyy}{aa}$, vel $\frac{bbyy}{aa} + dy - ee \propto \frac{2byx}{a} - xx$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Obiter autem & hic notandum, ut ex antedictis quoque facile est colligere, aliter etiam diametrum GA atque latus rectum GF indagari potuisse, hoc modo:

Cum AH indeterminatè sit $\propto y$, juxta primum Theorema hujus ita ducatur AG, ut recta HB, quemadmodum & quælibet alia ipsi AE parallela, quæ inter AH & AG intercipitur, sit $\propto \frac{by}{a}$; ponaturque ratio, quæ est inter AH & AB similesque, ut a ad e : ideoque cum AB indeterminatè sit $\propto \frac{ey}{a}$, terminus æquationis dy
per

per eandem divisus ostendet latus rectum sectionis $FG \propto \frac{ad}{e}$. Similiter terminus æquationis cc per prædictum latus rectum seu $\frac{ad}{e}$ divisus dabit quotientem $\frac{cce}{ad}$ pro quaesita AG .

Plura hîc exempla subungere supervacuum foret, cum mox omnes omnino casus possibiles generali regulâ annotare ac demonstrare animus sit.

Porro quamvis Regulas capite primo explicatas particularibus ibidem exemplis seu casibus in hypothese non illustraverimus, neque etiam id aut hîc aut in sequentibus ullo modo necessarium ducamus, quippe cum unusquisque, qui Regulas ipsas rectè perceperit, easdem quibuscumque propositis exemplis seu casibus in hypothese facillè applicare valeat; quandoquidem tamen libro primo insignes quasdam proprietates Parabolæ, Hyperbolæ, atque Ellipsis consultò prætermisimus, eâ mente, ut in hoc libro suis locis per modum Problematum non incongruè proponi ac demonstrari, simulque tanquam propositarum Regularum particularia exempla haberi possent, earundem explicationem hîc & sub finem sequentis capitis subjiciemus.

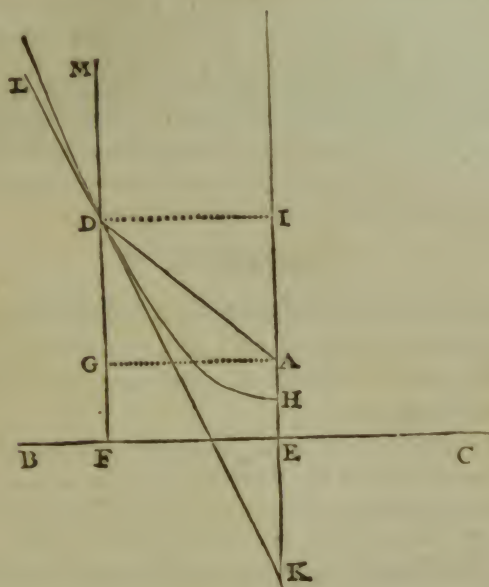
P R O B L E M A I.

Propositio II.

Datis puncto & lineâ rectâ, in plano per utrumque ducto aliud punctum invenire, à quo binæ rectæ, altera ad datum punctum, altera ad datam lineam perpendiculariter ductæ, sibi invicem sint æquales: & quoniam infinita sunt ejusmodi puncta, quæ quaestioni satisfaciunt, Locum determinare ac describere, in quo cuncta & singula reperiantur.

Sit datum punctum A , & data positione recta linea BC , oporteatque in plano quod per utrumque ducitur, aliud punctum invenire,

nire, quemadmodum D; ita ut ductæ rectæ DA, DF, quarum hæc ad datam BC intelligitur perpendicularis, sibi invicem æquales sint.



Ducta perpendiculari AE, quæ vocetur a , ac suppositis juxta Regulam binis lineis EF, FD incognitis atque indeterminatis datum angulum rectum EFD comprehendentibus tanquam cognitis ac determinatis, quarum prior EF vocetur x , ac posterior FD nominetur y ; si ducta præterea intelligatur AG ipsi EF æquidistans, erit in triangulo rectangulo AGD basis AD $\propto y$, utpote \propto ductæ DF; latus verò AG seu recta EF $\propto x$, & GD, sive (si punctum G cadat inter D & F) $FD - AE$, aut (si punctum D inter F & G cadat) $AE - FD \propto y = a$. Unde, cum quadratum basis æquale sit binis laterum quadratis simul sumptis, æquatio erit $yy \propto xx + yy - 2ay + aa$, hoc est, ablatis iis quæ se invicem destruant, omnibusque rite ordinatis, erit $2ay - aa \propto xy$. Qui quidem casus est Theorematis noni hujus libri conversum, ac proinde Locus quæsitus erit linea Parabolica. Quare si juxta

Mm

en,

ea, quæ ibidem exposita sunt, ex E ducatur recta EI indefinitè extensa atque ipsi FD æquidistans; & ab eadem auferatur recta EH $\propto \frac{a^2}{2a}$, id est, $\frac{1}{2}a$: erit describendæ Parabolæ diameter in dicta EI, (quæ quidem diameter axis quoque est, propter angulum EFD rectum) vertex autem in H, ac parameter $\propto 2a$. Unde, per ea quæ libri primi capite primo exposita sunt, Parabolam ipsam describere facillimum erit. Cumque porro axis punctum A, utpote quod ab H vertice distat quartâ ipsius parametri parte, id ipsum sit, quod vulgò Parabolæ Focus seu Umbilicus nuncupatur, apparet ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ ab Umbilico ad quodlibet Parabolæ punctum recta ducitur æqualis est axis portioni per applicatam ab eodem puncto abscissæ & quadrante parametri per verticem productæ.

Constat enim ex antedictis rectam AD, utcunque assumptum fuerit in curva punctum D, si per idem illud ad axem ordinatim applicata sit DI, æqualem esse perpendiculari DF, hoc est, rectæ IE, nempe axis portioni, per applicatam DI abscissæ, & per verticem H, longitudine HE $\propto \frac{1}{2}a$, id est, quadrante parametri, productæ.

Corollarium 2.

Manifestum quoque est ex antedictis, si positis quæ supra, & productâ FD, uti ad M, per assumptum punctum D contingens ducta sit, ut LDK, angulum FDK sive MDL angulo ADK æqualem esse.

¹ per 1 Cor.
² primi hujus.
³ per 5 primi.

Occurrat enim contingens LDK axi producto in K, eritque ¹ recta IH ipsi HK, ideoque (æqualibus HE, AH utrinque additis) recta IE, hoc est, AD, ipsi AK æqualis; ac proinde ² & angulus ADK angulo AKD, hoc est, angulo FDK sive MDL æqualis sit necesse est.

C A-

CAPUT III.

Tertio autem casu supra expresso, cum nempe quantitatum incognitarum utraque ad quadratum ascendit, sive altera in alteram ducta in æquatione reperitur, neque æquatio ad terminos magis simplices reduci potest, ad aliquam sequentium formularum deventum erit;

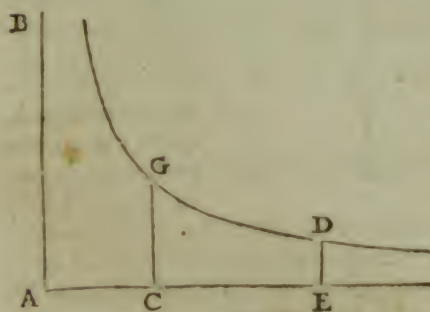
- I. $yx \propto ff.$
- II. $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff.$
- III. $yy - ff \propto \frac{lx}{g}.$
- IV. $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx.$

THEOREMA XI.

Propositio 12.

Si æquatio sit $yx \propto ff.$ Locus quaesitus est Hyperbola.

Sit enim, ut in præcedentibus, ipsius x initium immutabile A



punctum, atque eadem illa x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur; sitque datus vel assumptus angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAB, aut ejusdem ad binos rectos supplemento. Deinde sumatur in AE recta AC $\propto f$, ducaturque CG eidem

æqualis ac ipsi AB parallela, descriptaque¹ per punctum G at-

Mm 2

que¹¹

nec non cap. ult. lib. primi hujus tradita sunt.

que Asymptotis AE, AB Hyperbolâ GD: dico curvam GD esse Locum quæsitum.

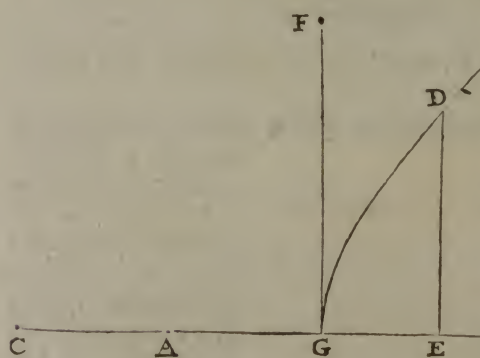
Sumatur enim in eadem curva punctum utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AB parallelâ, erit ex natura Hyperboles ¹ rectangulum AED rectangulo ACG, hoc est, quadrato ex AC æquale. Hinc, cum AE sit assumpta pro incognita quantitate x , si ED vocetur y , erit $y \propto \sqrt{ff}$. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

T H E O R E M A XII.

Propositio 13.

Si æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$, erit Locus quæsitus linea Hyperbolica.

Aut enim ipsi æqualis est aut inæqualis, & si æqualis sit, erit superior æquatio eadem ac si esset $yy \propto xx - ff$ (quod semel monuisse sufficiat). Ac



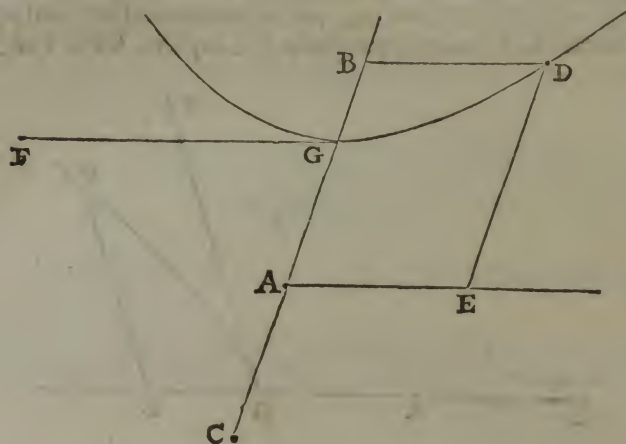
facile apparet, si ipsius x initium immutabile sit punctum A, atque eadem x se in linea AE ab A versus E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF,

quod si tam AG quàm AC fiant $\propto f$ cognita, ac GF sumatur $\propto GC$, centroque A, & transversâ diametro CG ipsi GF lateri recto sive parametro æquali describatur ² Hyperbola, ut GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

¹ per ea quæ cap. ult. primi hujus est sensa sunt.

Sumpto enim in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi FG parallelâ, erit ³ ex natura Hyperboles, cum CG & GF supponantur æquales, quadratum ex DE æquale rectangulo CEG.

E in linea AE indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus quem y & x comprehendunt æqualis angulo EAG aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, cum sit ut l ad g , ita $yy - ff$



ad xx , statim apparet, si tam AG quam AC sumantur æquales fcognitæ, fiatque ut l ad g , ita CG ad GF (quæ quidem GF sit ipsi AE parallela), ac postea centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF Hyperbola describatur GD, eandem curvam GD fore Locum quæsitum.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque DE ipsi AG, ac DB ipsi AE parallelâ, si eadem DE vocetur y , erit CB, hoc est, $DE + AC$, $\propto y + f$; & BG, sive $DE - AG$, $\propto y - f$, ideoque CBG rectangulum $\propto yy - ff$. Dein cum <sup>per 10 pri-
mi hujus.</sup> ex natura Hyperbolæ sit ut CG ad GF, hoc est, ex hypothesi ut l ad g , ita rectangulum CBG ad DB sive AE quadratum, id est, ita $yy - ff$ ad xx : erit $ggy - gff \propto lxx$, hoc est, $yy - ff \propto \frac{lxx}{g}$. Quod demonstrandum, determinandumque erat.

THEO-

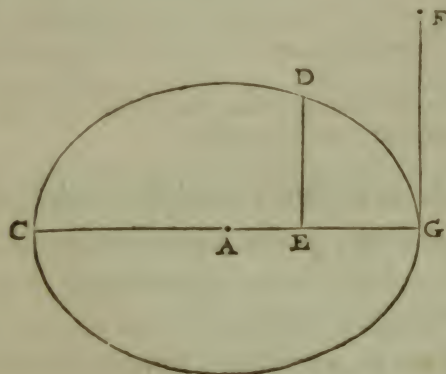
THEOREMA XIV.

Propositio 15.

Si æquatio sit $\frac{yy}{g} \propto ff - xx$, erit Locus quæsitus Ellipsis.

At verò cum Ellipseos species, quæ latera rectum & transversum æqualia habet, angulumque quem ordinatim applicatæ faciunt ad diametrum rectum, sit Circuli circumferentia: palam fit casu proposito Locum quæsitum etiam Circuli peripheriam esse posse.

Hinc ad prædicti Loci determinationem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se per lineam AE ab A versùs E indeterminatè extendere intelliga-



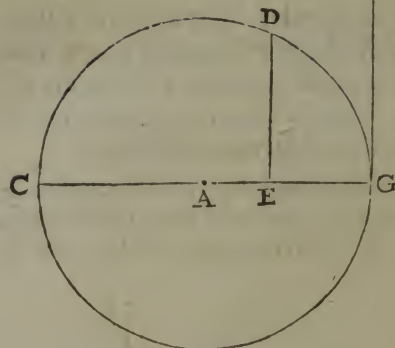
tur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo AGF. Porro cum sit ut l ad g , ita $ff - xx$ ad yy : facile apparet, si tam AG quam AC sumantur æquales f cognita; fiatque ut l ad g , ita CG ad GF, ac centro A, transversâ diametro CG, & parametro GF Ellipsis describatur GDC, ^{per 7 Corol. 13 &}

Summi primi hujus,

ut & per ea quæ circa finem cap. 4 ejusdem lib. tradita sunt.

Sumpto namque in ea puncto utcunque, veluti D, ductâque

¹ per 13 pri-
mi huius.



DE ipsi FG paral-
lelâ, erit ² ex natu-
ra Ellipseos ut FG
ad GC, ita ED
quadratum ad CEG
rectangulum. Hoc
est, si ED vocetur y,
cum CE sit $\infty f + x$,
& EG $\infty f - x$, erit
ut g ad l, ita yy ad ff
 $-xx$, unde $\frac{yy}{g} \propto ff$
 $-xx$. Quod erat
propositum.

Cæterum liquidò
constat, si CG &
GF æquales fuerint,
hoc est, si l = g, quòd
etiam CEG rectan-
gulum quadrato ED

æquale sit futurum. Ideoque si angulus CGF sit rectus, curvam
GDC fore Circuli circumferentiam.

*Regula universalis, modusque reduccendi omnes
æquationes, quæ ex convenienti operatione exi-
stunt, cùm Locus vel Hyperbola est, vel Ellipsis,
vel Circuli circumferentia, ad aliquem quatuor
casuum præcedentium, totidem Theorematibus
jam explicatorum.*

Si contingat, ut quantitatum incognitarum non mo-
dò una in alteram, aut non tantùm alterutra vel utra-
que in se ducta, sed & vel hæc, vel illa, vel utraque u-
nius præterea dimensionis in æquatione reperiat,ur,
constituens planum cum alia, sive cognitâ sive incogni-
tâ,

tâ, five etiam cum partim cognita & partim incognita quantitate : oportet loco incognitarum , aut illarum alterutrius, assumere alias vel aliam , quæ ipsis excedunt , vel ab iis deficiunt ; idque integrâ quantitate, quæ cum illa incognita , in cuius locum nova non est assumpta , planum constituere reperitur , si nempe incognitarum neutra in se ipsam in æquatione ducta sit ; sin secus , dimidio tantum ejus quantitatis , quæ planum constituit cum incognita , in cuius locum assumptio facta est , casu utroque juxta differentem affectionem per signa + vel — , quæ præfiguntur iisdem illis quantitatibus , ita ordinatis , ut cum incognitis ab eadem æquationis parte reperiantur. Quo facto, & reiterato, ubi opus, si ad formulas Parabolæ , capite secundo expostas perventum non fuerit, ad aliquem quatuor suprapositorum casuum reducta erit æquatio , ac proinde ipsi convenientem Locum determinare ac describere, per ea quæ superius explicata sunt, haud difficile erit.

*Exemplum reductionis æquationum ad formulam
Theorematis XI.*

Si æquatio fuerit $yx - ex + hy \propto ee$: assumpto $z \propto y - e$, & $v \propto x + h$, erit $z + e \propto y$, & $v - h \propto x$.

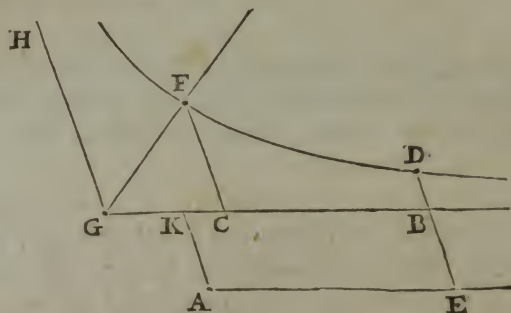
Unde si secundum Regulam ubique in æquatione loco y substituatur $z + e$, erit $zx + ex - ex + hz + he \propto ee$, five $zx + hz + he \propto ee$; ac rursus si loco ipsius x subrogetur $v - h$, erit $zv - bz + hz + he \propto ee$, id est, $zv \propto ee - he$. aut, (si loco termini $ee - he$, qui in totum cognitus est, scribatur ff) $zv \propto ff$. Et apparet æquationem reductam esse ad formulam Theorematis XI, ac proinde Locum quæsitum esse Hyperbolam.

Ad cujus specificam determinationem ac descriptionem esto in apposita figura initium ipsius x immutabile punctum A , atque eadem x per rectam AE indefinitè se extendere intelligatur, sitque angulus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo EAK

Nn

aut

aut ejusdem ad duos rectos supplemento. Deinde, quoniam z est $\propto y - c$, si y supra lineam AE exurgere concipiatur, ducenda quoque est supra eandem recta KB ipsi AE parallela; ita ut pars rectae AK , omniumque ipsi æquidistantium, inter AE & KB intercepta, veluti AK , æquetur c cognitæ. Porro, quoniam v est $\propto x + b$, producenda est ipsa BK per K usque ad G , ita ut KG sit



$\propto b$. Quo facto, erit G centrum ipsius curvæ, & GB una Asymptoton, eritque altera ipsi AK parallela, ut GH . Unde si juxta Regulam prædicti Theorematis XI in recta GB sumatur GC æqualis f cognitæ, ducaturque CF eidem GC æqualis, ac parallela rectæ AK vel GH , atque per punctum F , Asymptotis GB & GH , sive Asymptoto GB atque ad axem GF , Hyperbola describatur FD : dico curvam FD fore Locum quæsitum.

Sumpto enim in ea puncto utcumque, veluti D , ductâque DE ipsi AK parallelâ, quæ secet rectam KB in B , si eadem DE vocetur y , erit DB sive $DE - EB \propto y - c$, id est, z . Est autem & GB sive $AE + GK \propto x + b$, hoc est, v . Quare cum ex natura Hyperboles rectangulum GBD æquetur GC quadrato, erit quoque $zy \propto ff$. aut restitutis $y - c$ loco ipsius z , & $x + b$ in locum ipsius v , atque $ee - cb$ loco ff , erit $yx - cx + by - ch \propto ee - cb$, hoc est, $yx - cx + by \propto ee$. Quod erat propositum.

Exem-

*Exempla reductionis aequationum ad formulam
Theorematis XII & XIII.*

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$, assumpto
 $z \propto y + \frac{bx}{a} + c$, erit $y \propto z - \frac{bx}{a} - c$, eoque substituto in locum
 ipsius y , atque ejusdem quadrato loco yy , sublatisque iis, quæ se
 invicem destruant, erit $zz - \frac{bbxx}{aa} - \frac{2bcx}{a} - cc \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$.
 Et factâ congruâ transpositione, $zz \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a}$
 $+ dd + cc$, hoc est, multiplicatis omnibus æquationis terminis
 per aa , productoque diviso per $fa + bb$; ut quantitas xx absque
 fractione remaneat, fiet $\frac{aaz}{fa+bb} \propto xx + \frac{aaex+2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd+aaec}{fa+bb}$.

Deinde assumpto $v \propto x + \frac{aae+2abc}{2fa+2bb}$, ut terminus quoque æ-
 quationis, in quo x unius dimensionis reperitur, planè evanescat,
 habebitur $x \propto v - \frac{aae+2abc}{2fa+2bb}$. Quo substituto in locum ipsius x ,
 atque ejusdem quadrato loco xx , ablatisque iis quæ se invicem
 tollunt, reducta erit æquatio ad formulam requisitam. At verò ut
 vitetur prolixior operatio loco $\frac{aaz}{fa+bb} \propto xx + \frac{aaex+2abcx}{fa+bb} + \frac{aadd+aaec}{fa+bb}$ scribatur $2h$, ita ut
 fiat æquatio $\frac{aaz}{fa+bb} \propto xx + 2hx + \frac{aadd+aaec}{fa+bb}$. Tum assum-
 pto $v \propto x + h$ seu $x \propto v - h$, eoque substituto loco x in æquatio-
 ne, ac ejusdem quadrato loco xx : erit $\frac{aaz}{fa+bb} \propto vv - hh +$
 $\frac{aadd+aaec}{fa+bb}$. Unde apparet, ante omnia hic esse consideran-
 dum, utrum hh sit majus quàm $\frac{aadd+aaec}{fa+bb}$, an contra. si enim
 majus sit, erit casus Theorematis XII; sin contra, erit casus
 Theorematis XIII. Ponatur itaque primò majus, ac proinde æ-
 quatio formulæ Theorematis XII. Et constat exinde Locum
 quæsitum Hyperbolam esse.

Ad cujus peculiarem determinationem esto in apposita figura
 ipsius x initium immutabile A punctum, eademque x in linea A E
 ab A versus E indefinite se extendere intelligatur; sitque angulus

Nn 2

quem

dem Hyperbolæ centrum G punctum. At verò cum ex ante dictis triangulum KHG omnino sit cognitum, utpote lateribus KH & HG anguloque ad H sub iisdem comprehenso notis, erit quoque cognita ratio lateris KH ad KG, hoc est, ipsius GM (quæ per G ipsi KL æquidistans intelligitur) ad GB, quæ sit ut a ad v . Quare cum GM seu HL indefinitè sit v , GB quoque indefinite concepta, hoc est, qualibet diametri portio, inter centrum & ordinatim applicatas intercepta, erit $\frac{av}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum juxta formulam Regulæ unum æquationis terminum constituat, per multiplicationem aut divisionem, vel per utramque ita reducatur æquatio, ut in eadem quoque idem quadratum, nimirum $\frac{ivv}{aa}$ inveniatur. Quod quidem ut certâ methodo fiat, prædictum quadratum rectæ GB indefinitè conceptæ, hoc est, $\frac{ivv}{aa}$, dividatur per æquationis terminum, in quo vv sive simpliciter, sive aliâ fractione affectum invenitur, ac per inventum quotientem tota æquatio multiplicetur. ut in supra posito exemplo, si $\frac{ivv}{aa}$ dividatur per vv , fiet quotiens $\frac{iv}{aa}$. quare tota æquatio multiplicanda est per iv , productumque dividendum per aa , ita ut fiat $\frac{ivz}{fa+bb} \propto \frac{ivv}{aa} - \frac{ibb}{aa} + \frac{iidd+iecc}{fa+bb}$. Unde si juxta Regulam semi-latus transversum fiat GF vel GC $\propto \sqrt{\frac{ibb}{aa} - \frac{iidd+iecc}{fa+bb}}$, atque ratio transversi lateris CF ad rectum FN, ut iv ad $fa+bb$, & iisdem lateribus, diametroque ac centro jam inventis Hyperbole describatur FD, secans rectam AE vel KA productam in I: dico curvam ID esse Locum quæsitum.

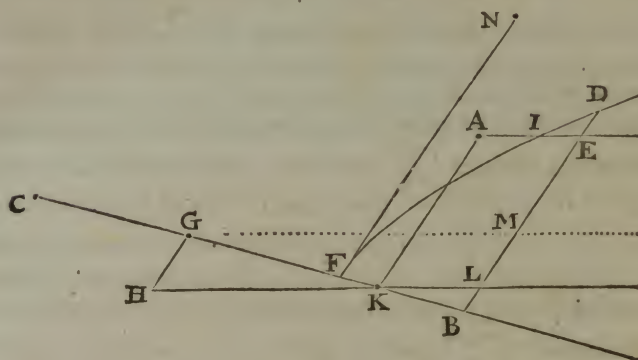
Sumpto enim in eadem curva puncto utcunque, veluti D, ductaque DE ipsi AK parallelâ, eâque productâ ut fecer rectam KL in L, & diametro GB occurrat in B, si eadem DE vocetur y , erit ex ante dictis DB $\propto z$. Est autem, ut jam annotatum, GB \propto

$$\frac{iv}{a}, \text{ atque ex hypothesi GF seu GC } \propto \sqrt{\frac{ibb}{aa} - \frac{iidd+iecc}{fa+bb}},$$

$$\text{ideoque BC } \propto \frac{iv}{a} + \sqrt{\frac{ibb}{aa} - \frac{iidd+iecc}{fa+bb}}, \text{ ac BF } \propto \frac{iv}{a} - \sqrt{\frac{ibb}{aa}}$$

N n 3

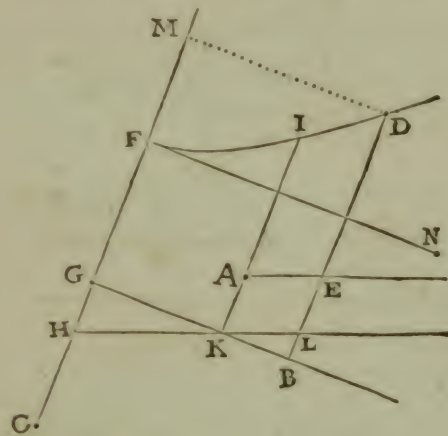
$\sqrt{\frac{iibb}{aa} - \frac{iidd + iicc}{fa + bb}}$, & rectangulum CBF $\propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$. Hinc cum ex natura Hyperboles NF ad FC, seu $fa + bb$ ad ii sit, ut DB quadratum, hoc est, $\zeta\zeta$, ad prædictum rectangulum CBF: erit $\frac{iizz}{fa + bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{iidd + iicc}{fa + bb}$.



Multiplicetur jam utrinque per aa , & dividatur per ii , eritque $\frac{aazz}{fa + bb} \propto vv - hh + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Dein restituto $x + h$ loco v , exurget $\frac{aazz}{fa + bb} \propto xx + 2hx + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$; itemque $\frac{aan + 2bca}{fa + bb}$ loco $2h$, exurget $\frac{aazz}{fa + bb} \propto xx + \frac{easx + 2bcax}{fa + bb} + \frac{aadd + aacc}{fa + bb}$. Porro multiplicatis omnibus per $fa + bb$ iisque divis per aa , habebitur $\zeta\zeta \propto \frac{fxx}{a} + \frac{bbxx}{aa} + ex + \frac{2bcx}{a} + dd + cc$. Ac denique restituto $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius ζ , expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis, fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod erat propositum.

At verò ponatur secundò hh minus quàm $\frac{ddaa + ccaa}{fa + bb}$, & supra posita æquatio $\frac{iizz}{fa + bb} \propto \frac{iivv}{aa} - \frac{iibb}{aa} + \frac{ddii + ccii}{fa + bb}$, quæ, multiplicatis omnibus ejusdem terminis per $fa + bb$, ac producto diviso

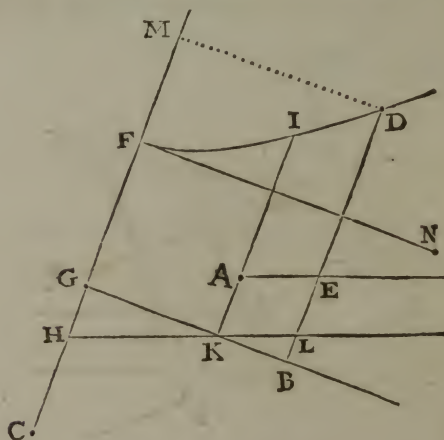
diviso per ii , factâque decenti transpositione, eadem cum sequenti
 $zz - dd - cc + \frac{faab + bbbb}{aa} \propto \frac{iiuv}{aa}$ multip. per $fa + bb$ ac di-
 vis. per ii , id est, $\propto \frac{fa uv + bb uv}{aa}$. erit formulæ Theorema-
 tis XIII, unde Locus quæsitus iterum erit Hyperbola. Ad cujus
 specificam determinationem & descriptionem, postquam ut in
 præcedenti figura ductæ sunt lineæ AE, AK, KL, KH, HG, &
 GKB: erit quidem, ut supra, G centrum, at verò non erit dia-
 meter in linea GK, sed, juxta Regulam, in linea HG producta



ad partes G, ad quam ordinatim applicatæ sint ipsi GKB paral-
 lelæ, eritque juxta eandem Regulam dimidium transversæ dia-
 metri, nempe GF vel GC, æquale $\sqrt{dd + cc - \frac{faab + bbbb}{aa}}$, ac
 ratio diametri ad parametrum ut $fa + bb$ ad ii . Quare si fiat, ut
 $fa + bb$ ad ii , ita CF ad FN, quæ quidem FN ipsi GKB æqui-
 distans sit, erit FN parameter: ac proinde si centro G transversâ
 diametro CF & parametro FN Hyperbola describatur FD, se-
 cans ipsam AE vel KA productam in I, erit ID curva Locus
 quæsitus.

Sumpto enim in eadem curva puncto utcumque, veluti D, du-
 ctâque DB ipsi AK (sive GF), & DM ipsi GB parallelâ, si
 ED

288 ELEM. CURVARUM
 ED vocetur y , erit, ut supra, DB five $MG \propto \zeta$, & BG five
 $DM \propto \frac{iv}{a}$. Cumque sit GF vel GC $\propto \sqrt{dd+cc} \frac{-fahb-bbbb}{aa}$,
 erit CM $\propto \zeta + \sqrt{dd+cc} \frac{-fahb-bbbb}{aa}$, & MF $\propto \zeta -$
 $\sqrt{dd+cc} \frac{-fahb-bbbb}{aa}$, ac propterea rectangulum CMF \propto
 $\zeta\zeta - dd - cc \frac{+fahb+bbbb}{aa}$. Est autem DM quadratum $\propto \frac{iiiv}{aa}$.



Quare cum ex natura Hyperboles sit ut FN ad FC, ita DM qua-
 dratum ad CMF rectangulum, hoc est, ut ii ad $fa+bb$, ita
 $\frac{iiiv}{aa}$ ad $\zeta\zeta - dd - cc \frac{+fahb+bbbb}{aa}$: erit quoque $\zeta\zeta - dd - cc$
 $\frac{+fahb+bbbb}{aa} \propto \frac{faiv+bbiv}{aa}$. Et multiplicatis omnibus per
 aa , ac divisus per $fa+bb$, factâque transpositione cogniti ter-
 mini, erit $\frac{aa\zeta\zeta}{fa+bb} \propto vv - hh \frac{+ddaa+ccaa}{fa+bb}$. Dein restituis
 $x+h$ loco v , $\frac{eaa+2bca}{fa+bb}$ loco $2h$, atque $y + \frac{bx}{a} + c$ loco ipsius ζ ,
 expunctisque quæ se invicem destruunt ac omnibus ritè ordinatis,
 fiet $yy + \frac{2bxy}{a} + 2cy \propto \frac{fxx}{a} + ex + dd$. Quod determinandum,
 demonstrandumque erat.

Si

Si æquatio sit $xx + 2ay \propto \frac{2byx}{a}$, aut $xx - \frac{2byx}{a} + 2ay \propto 0$.
 Assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{by}{a}$, erit $x \propto v + \frac{by}{a}$, eoq̃ue sub-
 stituto in locum ipsius x , ejusdemq̃ue quadrato loco xx , sublatif-
 q̃ue iis quæ se invicem destruunt, erit $vv - \frac{bbyy}{aa} + 2ay \propto 0$. &,
 factâ congruâ transpositione, $vv \propto \frac{bbyy}{aa} - 2ay$; hoc est, multi-
 plicatis omnibus æquationis terminis per aa , productoque diviso
 per bb , $\frac{aa}{bb}vv \propto yy - \frac{2a^2y}{b}$. Dein, assumpto $z \propto y - \frac{a^2}{b}$, habe-
 bitur $y \propto z + \frac{a^2}{b}$, eoq̃ue substituto in æquatione loco ipsius y , at-
 que ipsius quadrato loco yy , erit $\frac{aa}{bb}vv \propto zz - \frac{a^6}{b^4}$, sive $zz - \frac{a^6}{b^4}$
 $\propto \frac{aa}{bb}vv$. Qui quidem casus est Theorematis 13^{ui}, ac proinde
 Locus quæsitus erit Hyperbola.

Ad cujus itaque peculiarem determinationem esto in apposita
 figura ipsius x initium immutabile A punctum, eademq̃ue x in li-
 nea AB ab A versus B indefinitè sese extendere intelligatur, sit-
 q̃ue angulus, quem x & y comprehendunt, æqualis angulo ABE.
 Deinde, quoniam ex antedictis facile colligitur Hyperbolam hoc
 casu & similibus ita esse describendam, ut ordinatim ad ejus dia-
 metrum applicatæ sint ipsi AB æquidistantes, ductâ rectâ AC ipsi
 BE parallelâ, quoniam $v \propto x - \frac{by}{a}$, ducenda porrò est recta
 AM; ita ut omnium ipsi AB parallelarum partes, inter AC &
 AM interceptæ, veluti CM, ad partes ipsius AC inter A & di-
 ctas parallelas interceptas, veluti AC, eandem rationem ha-
 beant, quæ est inter b & a ; hoc est, ut sit quemadmodum a ad b ,
 ita AC ad CM. Unde si AC seu BE indefinitè sumpta vocetur
 y , erit CM & similes $\propto \frac{by}{a}$, ac describendæ Hyperboles dia-
 meter in dictâ AM. Porro, quoniam $z \propto y - \frac{a^2}{b}$, si ab AC au-
 feratur AF $\propto \frac{a^2}{b}$: erit FC indefinitè sumpta $\propto z$, & ductâ FN
 ipsi AB parallelâ, N centrum. Ac proinde, cum ratio ductæ ND
 ipsi FC æquidistantis & æqualis ad rectam DM aliarumq̃ue simi-
 lium sit cognita, nempe ut a ad b , sitq̃ue itidem notus angulus
 O O NDM,

gulum HMG $\propto \frac{eezz}{aa} - \frac{eeaa}{bb}$: hinc cum ex natura Hyperboles sit ut latus rectum ad transversum, sive ut bb ad ee , ita ME quadratum, id est, vv , ad prædictum rectangulum HMG: erit $\frac{eevv}{bb} \propto \frac{eezz}{aa} - \frac{eeaa}{bb}$, & multiplicatis omnibus terminis per aa , factoque per ee diviso, $\frac{aa vv}{bb} \propto zz - \frac{a^6}{b^4}$. Dein restituito $y - \frac{a^3}{b^2}$ in locum ipsius z , exurget $\frac{aa vv}{bb} \propto yy - \frac{2a^3 y}{b^2}$; adeoque, multiplicatis omnibus per bb , factoque diviso per aa , habebitur $vv \propto \frac{bb yy}{aa} - 2ay$. Denique restituito $x - \frac{by}{a}$ in locum ipsius v , expunctisque iis quæ se invicem destruant, atque omnibus rite ordinatis, fiet $xx + 2ay \propto \frac{2byx}{a}$. Quod fuit propositum.

PROBLEMA II.

Propositio 16.

Datis duobus punctis tertium invenire, à quo ad bina data ductæ rectæ lineæ dato differant intervallo, locumque determinare ac describere, quem quasitum punctum contingat.

Sint data duo puncta A & B, oporteatque invenire tertium, ut puta C, ita nempe ut ductæ rectæ CA, CB differant dato intervallo FG seu AD.

Quoniam in quaestione angulus datus non est, quò facilius sit operatio, assumatur rectus, ideoque à puncto C in rectam AB, quæ data puncta conjungit, productam, si opus fuerit, intelligatur demissa perpendicularis, ut CE; tum, suppositis, juxta Regulam, AE & EC incognitis atque indeterminatis, assumptum angulum AEC comprehendentibus, tanquam cognitis ac determinatis, earum prior, nimirum AE, vocetur x , ac posterior, nempe EC, nominetur y , ipsa autem AB, seu datorum punctorum cognita distantia, vocetur a , & data FG sive AD exprimat per b . Hinc cum BE sive (si punctum B cadat inter A & E) $AE - AB$, aut (si punctum E inter A & B cadat) $AB - AE$ sit

O o 2

$\propto x$

$\propto x = a$, & $AC \propto \sqrt{xx + yy}$, at $BC \propto \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$; sitque $AC - AD \propto BC$: æquatio erit

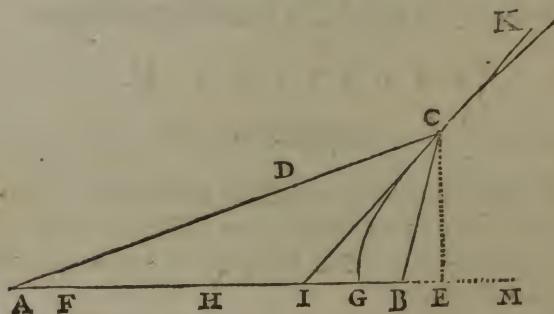
$\sqrt{xx + yy} - b \propto \sqrt{xx - 2ax + aa + yy}$, factâque operatione convenienti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit

$$4bbyy \propto 4aaxx - 4bbyx - 4a^3x + 4bbax + a^4 - 2bbba + a^4.$$

Unde factâ divisione per $4aa - 4bb$ habebitur $\frac{bbyy}{aa - bb} \propto xx -$

$ax + \frac{1}{4}aa - \frac{1}{4}bb$. Deinde assumpto juxta Regulam $v \propto x - \frac{1}{2}a$, erit $x \propto v + \frac{1}{2}a$, ideoque substituto hoc valore in locum ipsius x , atque ejusdem quadrato loco xx , expunctisque iis quæ se invi-

Fig. 1.



cem destruunt, erit $\frac{bbyy}{aa - bb} \propto vv - \frac{1}{4}bb$. Qui quidem casus est Theorematis 12^{mi} hujus libri, ac proinde Locus quæsitus erit Hyperbola. Cumque v assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versus E sumatur $AH \propto \frac{1}{2}a$, erit, juxta Regulam, H centrum, & semidiameter transversa (puta HG ab una, & HF ab altera parte,) $\propto \sqrt{\frac{1}{4}bb}$, id est, $\frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad diametrum HE perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\propto b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri, erit ut bb ad $aa - bb$. Unde per ea quæ libri primî capitibus secundo & ultimo exposita sunt Hyperbolam ipsam describere haud difficile erit. Porro cum quadratum semi-

diametri transversæ sit $\propto \frac{1}{2}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\propto \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$. Atqui cum FB sive BH + HF sit $\propto \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, & BG sive BH - HG $\propto \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, erit quoque rectangulum FBG $\propto \frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}bb$, nempe \propto quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ: ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò oppositarum Hyperbolarum Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Si ab assumpto utcumque in Hyperbola puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducantur, earum major minorem longitudine transversî axis superabit.

Etiamsi veritas præcedentis Corollarii ex antedictis omnino constet, cum tamen illud à Veteribus, Recentioribusve, quòd sciam, non nisi per multas ambages longæque difficilium Theorematum concatenatione hætenus demonstratum sit: id ipsum hic demonstratione unicâ, & quidem breviori satisque simplici, aliter ostendisse non inutile fortè judicabitur.

Esto igitur Hyperbola quælibet GC, cujus centrum H, transversus axis FG, atque Umbilici A & B, adeoque rectangulum FBG ut & GAF semi-secundæ diametri quadrato æquale. Ductis autem ab assumpto quolibet curvæ puncto C ad puncta A & B rectis CA, CB, ordinatim ad axem applicetur CE, fiatque ut HF ad HA, ita HE ad HM, ideoque ¹ AHE rectangulo æquale rectangulum FHM. Unde cum sit ², ut HFq ad GAF, ita FEG ad CEq: erit quoque, per compos. rationis contrariam, ut HFq ad (HFq + GAF, id est ³, ad) HAq; ita FEG ad FEG + CEq; adeoque ⁴ ut HFq ad HAq, ita (HFq + FEG sive ⁵) HEq ad HAq + FEG + CEq. Est autem quoque ⁶, ut HFq ad HAq, ita HEq ad HMq. Quocirca ⁷ HMq \propto HAq + FEG + CEq; hoc est, addito utrinque HFq seu HGq, erit

O o 3

HM

cundi. ⁶ ex constructione & per 22 sexti. ⁷ per 9 & 11 quinti.

¹ per 16
sexti.
² ex hypot.
& per 10
primi libri.
³ per 6 se-
cundi.
⁴ cum sit ut
utroque anteceden-
tium ad
utrumque con-
seq., ita om-
nes ante-
cedentes ad
omnes
conseq. per
12 quinti.
⁵ per 6 se-

$$^1 \text{ per 6 scundi. } HMq + \begin{cases} HFq \\ HGq \end{cases} \begin{cases} HAq \\ HBq \end{cases} \text{ seu } \infty \begin{cases} HFq + FEG, \text{ i.e. }^1 \\ HBq \end{cases} HEq + CEq.$$

Hinc additis vel sublatiis ab utraque æquationis parte æqualibus,

$$^2 \text{ per 4 scundi. } \text{nimirum } \begin{cases} FHM \\ GHM \end{cases} \text{ seu bis ab una, \& } \begin{cases} AHE \\ BHE \end{cases} \text{ bis ab altera parte: } \\ ^3 \text{ per 47 primi. } \text{erit } ^2$$

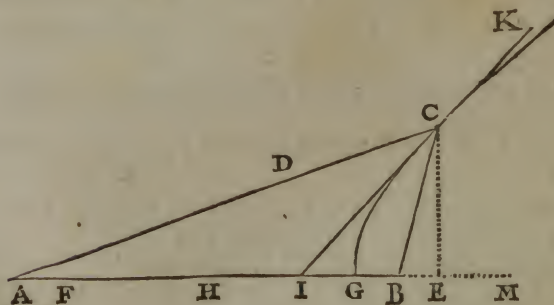
$^4 \text{ per 7 scundi. } FMq \propto (AEq + CEq, \text{ id est } ^3) ACq; \text{ itemque } ^4$
 $GMq \propto (BEq + CEq, \text{ id est } ^3) BCq.$ Cumque propterea
 $^5 \text{ per 47 primi. } FM \text{ sit } \propto AC; \& GM \propto BC; \text{ sitque ipsarum } FM \& GM \text{ dif-}$
 ferentia FG , manifestum est ipsarum quoque $AC \& BC$ ma-
 jorem superare minorem, ejusdem FG , nempe axis transver-
 si, longitudine. Quod demonstrandum erat.

Corollarium 2.

Ductis à quolibet Hyperbolæ puncto ad utrumque Umbilicum rectis, quæ angulum iis comprehensum bifariam dividit linea curvam in eodem puncto contingit; & conversim.

Si enim quæ angulum ACB bifariam dividit recta ICK non contingat Hyperbolam in C puncto, secet eandem, si fieri potest,

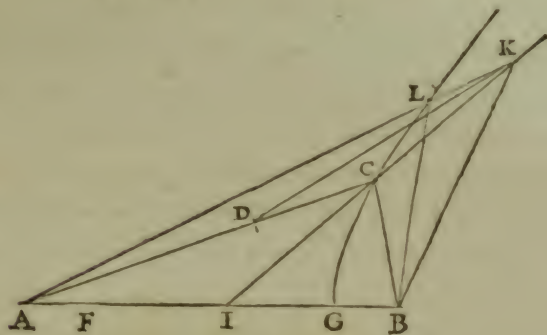
Fig. 1.



atque ita saltem aliquo sui puncto, veluti K , intra Hyperbolam sit.
 Tum

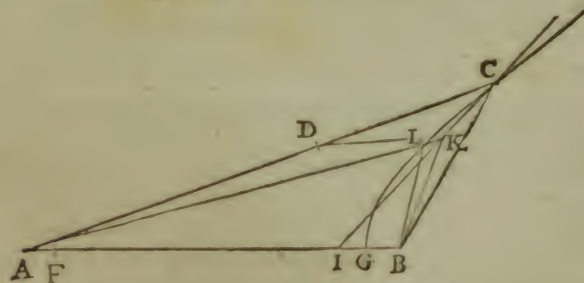
Tum ductis KB, KD, & KA (quarum posterior Hyperbolam secet in L, à quo ad B ducta sit BL), cum in triangulis DCK, BCK latera DC, CK lateribus BC, CK utrumque utrique,

Fig. 111.



circa æquales angulos, æqualia sint, erit quoque basis DK basi BK æqualis. Cumque porro, juxta Corollarium præcedens, AL ipsam LB, ideoque & AK rectas BL, LK, simul sumptas, superet intervallo AD; sitque BK, ideoque & KD, ipsis BL, LK simul sumptis minor: per consequens AK eandem KD majori longitudine quam est AD excedet, id est, ipsa AK binis re-

Fig. 111.



Cum enim ex hypothesis anguli ACI & BCI æquales ponantur, erunt quoque anguli ACK & BCK, qui ipsis sunt deinceps, per 13 primi æquales.

ctis KD, DA simul sumptis major erit. Quod cum absurdissimum sit, non secet itaque Hyperbolam recta ICK, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in eodem puncto C alia mi-
recta

¹ per 3 Ca-
rol. 6 primi
hujus.

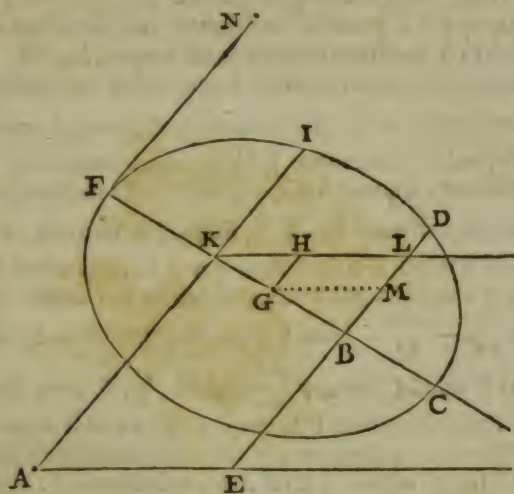
recta Hyperbolam contingere quàm ICK¹, manifestum est con-
versum, eam, quæ Hyperbolam in C contingit, angulum quoque
ABC bifariam dividere.

*Exemplum reductionis æquationum ad formulam
Theorematis XIV.*

Si æquatio sit $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cyx - xx + dx + kk$, assump-
pto juxta Regulam $zx - y - c + \frac{bx}{a}$, hoc est, $y = zx + c - \frac{bx}{a}$,
eoque substituto in locum ipsius y , ejusdemque quadrato loco yy ,
sublatisque iis, quæ se invicem destruunt, erit $zx - \frac{bbxx}{aa} + \frac{2bcx}{a}$
 $- ccx - xx + dx + kk$, id est, factâ decenti transpositione,
erit $zx - xx + \frac{bbxx}{aa} + dx - \frac{2bcx}{a} + cc + kk$ sive
 $zx - \frac{aa - bb}{aa} + \frac{dax - 2bcx}{a} + cc + kk$. Supposito au-
tem a majore quàm b , ac multiplicatis omnibus æquationis ter-
minis per aa , productoque diviso per $aa - bb$, ut quantitas xx
absque fractione inveniatur, erit $\frac{aa - bb}{aa - bb} \infty - xx + \frac{dax - 2bcx}{aa - bb}$
 $+ \frac{caa + kkaa}{aa - bb}$. Jam verò si facilioris operationis gratiâ loco
 $\frac{dax - 2bcx}{aa - bb}$ substituatur $2h$: erit æquatio $\frac{aa - bb}{aa - bb} \infty - xx + 2hx$
 $+ \frac{caa + kkaa}{aa - bb}$, aut $\frac{aa - bb}{aa - bb} + xx - 2hx \infty \frac{caa + kkaa}{aa - bb}$.
Hinc si juxta Regulam assumatur $v \infty x - b$ sive $x \infty v + b$, atque
hoc in locum ipsius x , ejusque quadratum loco xx substituatur,
ac expungantur quæ se invicem destruunt, habebitur $\frac{aa - bb}{aa - bb}$
 $+ vv - hh \infty \frac{caa + kkaa}{aa - bb}$. Hoc est, factâ decenti transpositio-
ne, erit $\frac{aa - bb}{aa - bb} \infty - vv + hh + \frac{caa + kkaa}{aa - bb}$. Atque ita appa-
ret æquationem esse reductam ad formulam Theorematis XIV,
ideoque Locum quæsitum aut Ellipsin aut Circuli circumferen-
tiam existere. Rursus verò facilioris operationis ergo loco
 $\frac{aa - bb}{aa - bb}$ scribatur $\frac{1}{g}$, & loco $hh + \frac{caa + kkaa}{aa - bb}$ scribatur ff , ita
ut æquatio sit talis $\frac{1}{g} \infty ff - vv$.

Ad

Ad peculiarem autem prædicti Loci determinationem ac descriptionem esto in apposita figura ipsius x initium immutabile A punctum, atque eadem x se in linea A E ab A versus E indefinitè extendere intelligatur, sitque angulus datus vel assumptus, quem y & x comprehendunt, æqualis angulo E A K vel ejusdem ad duos rectos complemento. Hinc quoniam $\tilde{x} \propto y - c + \frac{bx}{a}$, si y supra lineam A E exurgere intelligatur, ducenda quoque est supra ipsam recta K L eidem parallela, ita ut pars rectæ A K omniumque ipsi æquidistantium inter prædictas A E & K L intercepta, veluti A K,



E L, &c. æquetur c cognitæ: ac deinde per punctum K infra rectam K L ducenda est recta K B in tali angulo, ut rectarum omnium ipsi A K parallelarum partes, quæ inter K L & K B interceptiuntur (veluti L B) ad partes ipsius K L, inter easdem parallelas & punctum K interceptas (ut verbi gratiâ L K) eandem habeant rationem, quæ est inter b & a , hoc est, ut sit uti a ad b , ita K L ad L B. Atque ita positâ K L sive A E, indefinitè sumptâ, $\propto x$, L B omnesque ipsi parallelæ inter K L & K B interceptæ erunt $\frac{bx}{a}$. Unde ex prædictis constat diametrum fore in recta K B,

P p

ad

ad quam ordinatim applicatae sint ipsi AK æquidistantes. Jam verò cum y sit $\propto x - b$, à recta KL sive AE auferenda est KH, ita ut eadem KH sit $\propto b$, ideoque HL indefinitè quoque sumpta $\propto x - b$ seu v . Deinde per punctum H ducenda est HG ipsi AK parallela, secans inventam diametrum in G, eritque idem intersectionis punctum G quæsitæ Ellipseos centrum. Porro quoniam similium triangulorum KHG & KLB nota est ratio lateris KH ad HG sive KL ad LB, ut & angulus sub iisdem lateribus contentus, utpote æqualis angulo dato vel assumpto EAK, erit quoque nota ratio lateris KH ad latus KG sive KL ad KB, quæ ponatur ut a cognitæ ad e itidem cognitam. Ideoque cum HL sive GM, quæ ipsi HL parallela intelligitur, indeterminatè sumpta sit $\propto v$, erit GB, similiter indeterminatè sumpta, hoc est, quælibet diametri portio inter centrum & quamlibet ordinatim applicatam intercepta, $\propto \frac{ev}{a}$. Cujus quidem interceptæ quadratum cum in formula Theorematis XIV ultimum æquationis terminum constituat, æquatio supra exposito modo ita reducat, ut terminus ejus extremus fiat $\frac{eevv}{aa}$, id quod factum erit, si singuli æquationis termini multiplicentur per ee , productumque dividatur per aa . inde enim sequenti modo se habebit æquatio $\frac{leezz}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc si juxta Regulam semi-latus transversum GF vel GC fiat $\propto \sqrt{\frac{efff}{aa}}$, id est, $\frac{ef}{a}$, & ratio transversus lateris CF ad rectum latus FN, ut lee ad gaa , iisdemque lateribus, ac diametro, centroque, modò inventis, Ellipsis describatur FDC, secans rectam AE vel AK productam in I: erit curva IDC Locus quæsitus.

Sumpto enim in ea puncto utcumque, veluti D, ductâque DE ipsi AK parallelâ, ac si opus sit productâ ut secet rectas KL & KB in L & B, si eadem DE vocetur y , erit DB, hoc est, DE $- EL + LB \propto y - e + \frac{bx}{a}$ seu ζ . Est autem ut jam annotatum est $GB \propto \frac{ev}{a}$, atque ex constructione GF vel GC $\propto \frac{ef}{a}$, ideoque $FB \propto \frac{ef}{a} + \frac{ev}{a}$, & BC $\propto \frac{ef}{a} - \frac{ev}{a}$, ac rectangulum FBC $\propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$. Hinc cum ex natura Ellipsis sit ut NF ad FC, hoc est,

ut

ut gaa ad lee , ita DB quadratum, hoc est, $\zeta\zeta$ ad prædictum re-

ctangulum FBC ; erit $\frac{lee\zeta\zeta}{gaa} \propto \frac{ffee}{aa} - \frac{eevv}{aa}$, id est, multiplica-

tis omnibus per aa ,

ac divis per ee , erit

$\frac{l\zeta\zeta}{g} \propto ff - vv$, ideo-

que restituto $x - h$

loco v , atque $hh +$

$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$ loco ff ,

ut & $\frac{aa}{aa - bb}$ loco $\frac{l}{g}$,

erit $\frac{aa\zeta\zeta}{aa - bb} \propto hh +$

$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb} - xx +$

$2hx - hh$, hoc est,

$\frac{aa\zeta\zeta}{aa - bb} + xx - 2hx$

$\propto \frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$. Por-

rò restituto

$\frac{daa - 2bca}{aa - bb}$ loco $2h$,

fiet $\frac{aa\zeta\zeta}{aa - bb} + xx$

$- \frac{daax + 2bcax}{aa - bb} \propto$

$\frac{ccaa + kkaa}{aa - bb}$, id est, factâ multiplicatione per $aa - bb$ ac divi-

sione per aa , erit $\zeta\zeta + xx - \frac{bbxx}{aa} - dx + \frac{2bcx}{a} \propto cc + kk$.

Ac denique loco ζ factâ restitutione ipsius $y - c + \frac{bx}{a}$, deletis que

is quæ se invicem tollunt, ac omnibus ritè ordinatis, obtinebi-

tur $yy + \frac{2bxy}{a} - 2cy \propto -xx + dx + kk$. Quod determinan-

dum ac demonstrandum erat.

Notandum porrò hic est, quòd si angulus AKB foret rectus,

ac proinde ordinatim applicatæ, ut DB , KI , &c. ad diametrum

KB perpendiculares, ac simul FN æqualis FC , prædictam cur-

vam fore Circulum, quemadmodum ex elementis perspicuum est.

Pp 2

PRO-

ne decenti, ut utraque æquationis pars à signo radicali liberetur, & transpositis transponendis, erit .

$4bbxx - 4aaxx - 4bbax + 4a^3x \propto b^4 - 2bbaa + a^4 - 4bbyy$, hoc est, factâ divisione per $4bb - 4aa$, erit

$xx - ax \propto \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa - \frac{bbyy}{bb - aa}$. Assumpto deinde juxta Regulam $y \propto x - \frac{1}{2}a$, erit $x \propto y + \frac{1}{2}a$, eâque substitutâ in locum ipsius x , ejusdemque quadrato loco xx , expunctisque iis quæ se invicem destruant: erit $xx \propto \frac{1}{4}bb - \frac{bbyy}{bb - aa}$, sive $\frac{bbyy}{bb - aa} \propto \frac{1}{4}bb$

$- xx$. Qui quidem casus est Theorematis 1^o, ac proinde Locus quæsitus Ellipsis. Cumque y assumpta sit pro $x - \frac{1}{2}a$, si ab A versus E sumatur $AH \propto \frac{1}{2}a$: erit, juxta Regulam, H centrum, & semi-diameter transversa (velut HF ab una, & HG ab altera parte) $\propto \frac{1}{2}b$; ita ut diameter transversa FG (quæ quidem, ob applicatam CE ad eandem perpendicularem, transversus quoque axis est,) sit $\propto b$. Ratio autem transversæ diametri ad parametrum, seu quadrati transversæ ad quadratum secundæ diametri erit, ut bb ad $bb - aa$. Unde per ea, quæ Capitibus tertio & ultimo libri primi exposita sunt, quæ sita Ellipsis facillimè describentur. Porro cum quadratum semi-diametri transversæ sit $\propto \frac{1}{4}bb$, erit quadratum semi-secundæ diametri $\propto \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$. Atqui cum FB seu GA sit $\propto \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}a$, & BG seu AF $\propto \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}a$, erit quoque rectangulum FBG seu GAF $\propto \frac{1}{4}bb - \frac{1}{4}aa$, nempe æquale quadrato semi-secundæ diametri, sive, ut Veteres loquebantur, æquale quadranti figuræ ad transversum axem factæ. Ideoque puncta A & B ea ipsa sunt, quæ vulgò Ellipseos Foci sive Umbilici nuncupantur. Unde apparet, ex præmissis rectè inferri, quæ sequuntur.

Corollarium 1.

Quæ à quolibet in Ellipsi puncto ad utrumque Umbilicum rectæ ducuntur, simul sumptæ transverso axi æquales sunt.

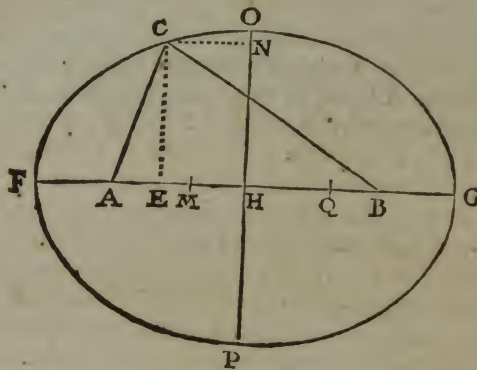
Quemadmodum autem in Hyperbola superius demonstratum est, ductarum CA, CB differentiam transverso axi FG æquari, ita & hic earum aggregatum eidem transverso axi æquale esse ostendetur, nempe, si non per additionem & compositionem,

pp 3

ut

ut ibidem factum est, sed per subductionem & divisionem argumentatio instituitur. Quod ipsum tamen, adhibita nonnulla mutatione, elegantius quoque in hunc modum absolvi posse videtur.

Esto quælibet Ellipsis FCG, cujus centrum H, axis major FG, minor OP, atque Umbilici A & B; adeoque rectangulum FBG ut & GAF æquale quadrato semi-secundæ diametri HO.

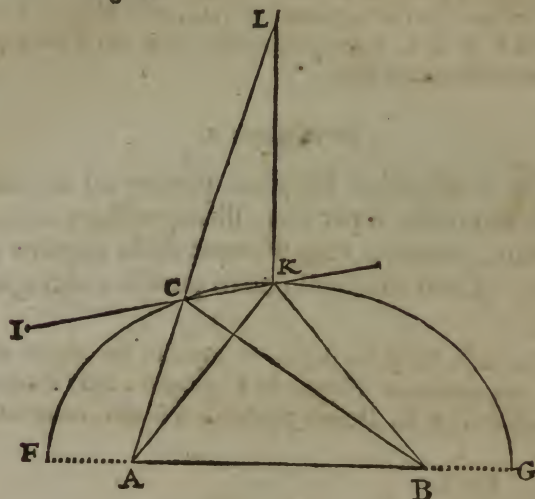


Ductis ab assumpto quolibet curvæ puncto C rectis CA, CB, ordinatim ad utrumque axem applicentur CE, CN; & fiat ut HF ad HA, ita HE ad HM, aded ut ¹ AHE rectangulo æquale sit rectangulum FHM; sumaturque HQ æqualis ipsi HE. Hinc cum sit ² ut HFq ad HAq, ita HEq ad HMq, erit quoque per conversionem rationis ut HFq ad GAF seu ³ HOq, id est ⁴, ut CNq sive HEq ad ONP, ita idem HEq ad EMQ; ac proinde ⁵ æqualia sunt rectangula ONP & EMQ. Quocirca cum ⁶ HMq unà cum EMQ, id est, cum ONP rectangulo, æquale sit HEq; sitque & HFq ⁷ æquale quadratis rectarum HA & (HO ⁸ seu ⁹) CE unà cum rectangulo ONP: erunt HMq + ONP + HFq æqualia HEq + HAq + CEq + ONP. Ac proinde si utrinque auferatur ONP rectangulum, remanebunt binæ quadrata rectarum HM & HF seu HG simul æqualia tribus quadratis rectarum HE, HA seu HB, & CE. Hinc

¹ per 16
sexii.
² per 22
sexii.
³ ex hypo-
thesi.
⁴ per 13 pri-
mi huius e-
jusque Co-
rol. 1.
⁵ per 5 quin-
ti.
⁶ per 5 se-
cundi.
⁷ per 5 se-
cundi.
⁸ quippe
quadr. ex
HO æqua-
le est GAF rectang. ex hypoth. ⁹ per 5 secundi.

304 ELEM. CURVARUM
per Corollarium præcedens, rectæ AK, KB, hoc est, latera
AK, KL simul sumpta transverso axi FG, ideoque & basi AL

Fig. II.



¹ per 20 pri- æqualia, quod est absurdum ². Non igitur secat recta ICK El-
mi. lipsin, sed eandem contingit in C puncto. Cumque non possit in
² per 17 pri- eodem puncto C alia recta Ellipsin contingere quam ICK ², ma-
mi hujus. nifestum est, è contra quoque eam, quæ Ellipsin in C contingit,
efficere angulos ACI, BCK æquales.

CAPUT IV.

*Regula universalis inveniendi ac determinandi
loca qualibet plana & solida.*

Jam verò his omnibus ita præmissis, pro generali
Regula concludi potest, æquationes omnes, quæ in in-
dagatione Locorum prædicto modo obvenire atque
obtingere possunt, ita ut in iis neutra quantitatum in-
cognitarum in se ducta, neque factum sub iisdem ad so-
lidum

lidum excurrat, sed aut quadratum, aut planum non excedat, ex aliqua sequentium formularum constare, vel ad earundem aliquam Methodo jam explicatâ reduci posse: nimirum,

$$1^{\text{mo}}. \begin{cases} y \propto \frac{bx}{a}, \text{ sive, quod idem est, } y \propto x: \text{ cum supponi} \\ \text{possit esse } a \propto b, \\ y \propto \frac{bx}{a} \text{ 8c, vel } y \propto c - \frac{bx}{a}. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Signum 8} \\ \text{significat +} \\ \text{vel -}. \end{matrix}$$

Sed hic notandum, fieri etiam posse, ut per operationem quantitatum incognitarum altera evanescat, alteraque sola notæ alicui quantitati æqualis remaneat, sicut superius expositum est.

$$2^{\text{do}}. \begin{cases} yy \propto dx, \text{ aut conversim } dy \propto xx. \\ yy \propto dx. ff, \text{ aut conversim } dy. ff \propto xx. \\ \chi\chi \propto dx, \text{ aut conversim } dy \propto vv. \\ \chi\chi \propto dx. ff, \text{ aut conversim } dy. ff \propto vv. \end{cases}$$

$$3^{\text{tio}}. \begin{cases} yy \propto \frac{lx}{g}. ff. \\ \chi\chi \propto \frac{lx}{g}. ff. \\ yy \propto \frac{lv}{g}. ff. \\ \chi\chi \propto \frac{lv}{g}. ff. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{sive etiam} \\ yx \propto ff. \\ \chi x \propto ff. \\ yv \propto ff. \\ \chi v \propto ff. \end{matrix}$$

Supponendo ubique y & x esse quantitates indeterminatas ac primò conceptas; at verò χ esse quantitatem assumptam, & quæ composita sit ex y 8 aliâ quâdam quantitate, vel in totum cognitâ, vel cui etiam altera incognita primùm concepta, nimirum x , permixta sit; atque v quidem assumptam quoque esse, sed eo casu constare solummodo ex x 8 aliâ quantitate cognitâ, absque ulla ipsius y incognitæ quantitatis permixtione: aut contra v esse $\propto x$ 8 aliâ quâdam quantitate

Qq

titate, cui & y incognita permixta esse possit atque eoque casu z ex y & aliâ quantitate in totum cognitâ constare.

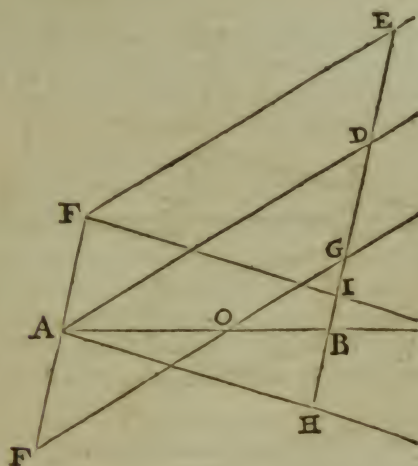
Et si æquatio similis sit alicui formularum sub N° 1. comprehensarum, erit Locus quæsitus Linea Recta; sub N° 2. Parabola; & sub N° 3. secundum signorum angulorumque varietatem vel Hyperbola, vel Ellipsis, vel Circulus.

Ut autem prædicta Loca specificè determinentur si prædictæ Lineæ in plano Geometricè describantur, sciendum est, aliquod debere præsupponi punctum, ut & aliquam lineam à quo exordium sumat, & per quam indefinitè se extendere intelligatur altera incognitarum quantitarum primò conceptarum; itemque angulum quendam esse præsupponendum, quem dictæ quantitates incognitæ constituent in puncto, in quo sibi invicem junctæ intelliguntur.

Sit itaque in apposita figura, ut & in sequentibus omnibus, prædictum punctum A, dictaque linea AB, à quo, & per quam quantitas x se indefinitè extendere concipiatur; atque angulus ABE, quem faciunt quantitates y & x , in puncto B sibi invicem junctæ.

Et primo quidem casu, cum Locus quæsitus est Linea recta, nimirum, æquatione existente $y \propto x$ vel $y \propto \frac{bx}{a}$, ipsum A punctum erit initium dictæ lineæ, atque ut eadem specificè describatur sumendum est in linea AB punctum utcumque, exempli gratiâ, B, ac per illud ductâ rectâ, velut HBE, ita ut angulus ABE præsupposito vel concepto angulo sit æqualis, si in eadem recta sumatur punctum, veluti D; ita ut AB & BD sint æquales, vel ut AB sit ad BD, sicut a ad b , atque ex A per punctum D ducatur recta AD: erit eadem AD indefinitè extensa Locus quæsitus. At si in æquatione inveniatur quoque terminus c , ac ipse quidem signo + affectus sit, ducenda est è puncto A ad eandem partem lineæ AB quàm est punctum E, aut si signo — adficiatur ab altera parte, recta AF ipsi HBE parallela atque æqualis c cognita; ductâque FE vel FG, quæ rectam AB secet in O, ipsi AD parallelâ: erit FE vel OG indefinitè producta Locus quæsitus. Sed

Sed si æquatio sit $y \propto c - \frac{bx}{a}$, in dicta linea HBE sumendum est ab altera parte lineæ AB, quâ datus vel assumptus angulus ABE existit, punctum H, ita ut AB ad BH sit, sicut a ad b ; ductâque AH, ex prædicto puncto F ab opposita parte lineæ AB, quâ sum-



ptum est punctum H, ducenda est FI ipsi AH parallela: eritque eadem FI producta donec cum linea AB coïncidat Locus quæsitus.

Etenim, cum tam AB quàm BD sit $\propto x$, aut AB ad BD ab una, ut & AB ad BH ab altera parte, sit ut a ad b ; ac proinde BD vel BH $\propto \frac{bx}{a}$: itemque, cum AF seu DE vel DG ut & HI sint æquales c cognitæ: erit BE five BD + DE $\propto \frac{bx}{a} + c$, & BG five BD - DG $\propto \frac{bx}{a} - c$, ac BI five HI - HB $\propto c - \frac{bx}{a}$. Unde cum punctum B sumptum sit utcumque, eadem erit de omnibus aliis, in linea AB, prædictisve locis, assumptis punctis demonstratio: atque ita patet prædictas lineas AD, FE, FG, & FI esse Loca quæsitæ. Quod determinandum, demonstrandumque erat.

Qq 2

At

At si æquatio sit $z z \propto dx$, vel $z z \propto dx. ff$, cum z non sit quantitas primò concepta sed assumpta, vel assumpta erit pro $y 8 c$, vel pro $y 8 \frac{bx}{a}$, vel denique pro $y 8 \frac{bx}{a} 8 c$.

III. Et si quidem z assumpta sit pro $y 8 c$, qui sit casus tertius, ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela atque $\propto c$; ita ut, si z assumpta sit pro $y - c$, punctum D cadat ad eandem partem lineæ AB, quam conceptus est angulus ABE: Et, si z sit assumpta pro $y + c$, punctum D è contra ad alteram partem lineæ AB cadat. Deinde ductâ DK ipsi AB parallela, erit in eadem DK Parabolæ diameter, & D vertex, si æquatio sit $z z \propto dx$.

IV. Sed si sit $z z \propto dx. ff$, qui sit quartus casus, sumptâ DL $\propto \frac{ff}{a}$, erit vertex punctum L; quod quidem pro terminorum dx & ff per + vel - affectione eodem modo, ut supra de puncto F dictum est, vel citra vel ultra D punctum cadet; uti & vel in hanc vel in illam partem, prout terminus dx signo + vel - affectus fuerit, ipsa Parabola, ut supra notatum est, describi debet: eritque omnibus & singulis prædictis quatuor casibus Parameter $\propto d$.

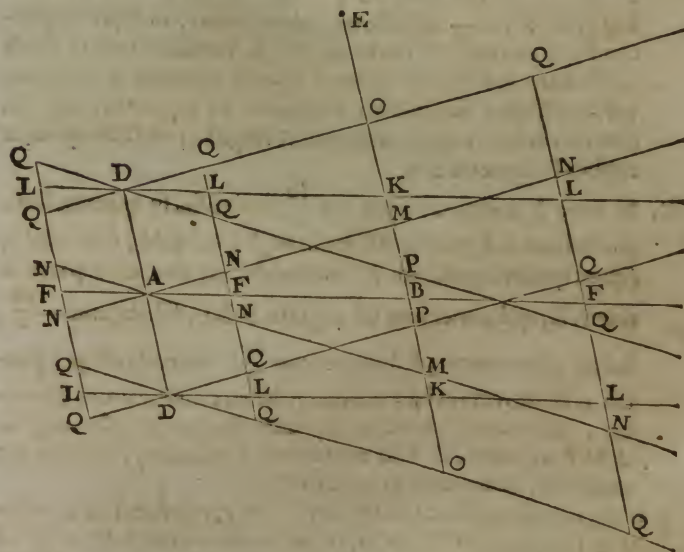
V. Si verò z assumpta sit pro $y 8 \frac{bx}{a}$, qui casus sit quintus, sumpto in linea BE puncto M, ita ut sit AB ad BM, sicut a ad b , (quod quidem punctum M sumendum est ab eadem parte lineæ AB, quâ conceptus est angulus ABE, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, sed ab altera parte, si habeatur $+\frac{bx}{a}$) ducenda est per puncta A & M recta AM: eritque A M eo casu Parabolæ diameter, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo AME æquales, & si in æquatione terminus ff deficiat aut nullus sit, erit vertex in puncto A.

VI. Sin minus, qui sit casus sextus, ductis per puncta F & L rectis FL, quæ interfecent supra dictas diametros AM vel iis in directum adjunctas in punctis N: erit vertex in N, vel citra, vel ultra A punctum cadens, prout termini dx & ff in æquatione vel signo + vel signo - affecti fuerint; uti & vel in hanc vel in illam partem ipsa Parabola pro varia termini dx affectione, ut supra notatum est, describenda erit.

Si denique χ assumpta sit pro y $8 \frac{bx}{a} 8c$, ductâ, ut modò expositum fuit, $AD \propto c$, ex puncto D (quod pro quantitatis c per signum $+$ vel $-$ affectione, ut supra, vel ab hac, vel ab illa parte lineæ AB sumi debet) ducenda est recta DO ipsi

VII. AM , quæ est ad eandem partem, parallela, si termini $\frac{bx}{a}$ & c eodem signo sint affecti, qui casus sit septimus.

VIII. At si diverso, qui sit casus octavus, ducenda est recta DP parallela ipsi AM , quæ est ab adversa parte lineæ AB , atque eadem DO vel DP sumenda est pro diametro, ad quam ordinatim applicatæ faciant angulos angulo DOE vel DPE æquales: eritque vertex punctum D , si terminus ff in æquatione deficiat.



IX. Sin minùs, qui sit casus nonus, erit idem vertex ipsarum DO vel DP diametrorum & linearum LFL communis intersectio, videlicet punctum Q , quodque iterum pro terminorum dx & ff per signum $+$ vel $-$ affectione vel citra vel ultra D punctum cadit; quemadmodum & ipsa Parabola vel versùs hanc

hanc vel versùs illam partem pro diversa termini dx affectione, ut supra est notatum, describenda est: Ac postremis quidem istis quinque casibus jam explicatis Parameter erit ad d cognitam, sicut AB ad AM , hoc est, erit ut AM ad AB , ita d ad Parametrum.

Quorum quidem omnium demonstratio perfacilis est. Intelligantur enim Parabolæ prædictis diametris ac parameteris descriptæ, quæ per annotatos vertices transeant, sitque ordinatim ad easdem diametros applicatarum aliqua in recta OE utcumque sumpta, & supponatur easdem Parabolæ prædictam applicatam secare in E puncto: eritque primo casu, cum pars diametri AB inter verticem A & quamlibet ad eandem diametrum applicatam intercepta, veluti AB , concipiatur, ut x , ac singulæ illæ applicatæ, ut y ; sitque Parameter $\propto d$, atque ex natura Parabolæ ^{per 1 primi hujus.} rectangulum sub dicta Parametro & recta AB contentum sit $\propto BE$ quadrato: erit $dx \propto yy$.

Secundo casu, ubi vertex est in puncto F cum triplici distinctione, ut supra monitum est, notandum primò venit, in casibus, ubi æquatio est $yy \propto dx + gff$, punctum B in linea FB ab A versùs B indefinitè sumi posse: cum istis casibus ab A versùs B Parabolam describendam esse supra annotatum sit; At verò casu, ubi æquatio est $yy \propto ff - dx$, cum juxta Regulam Parabolæ in contrariam partem ab F versùs A sit describenda, punctum B non nisi inter F & A assumendum esse. id quod etiam ex ipsa æquatione manifestum est. Quoniam enim in prædicta æquatione $yy \propto ff - dx$ sive quod idem est $ff - yy \propto dx$, terminus ff major est quàm dx , utpote eundem excedens quantitate yy ; idcirco quoque si utrinque divisio fiat per d , $\frac{ff}{d}$ majus erit quàm x . Quare cum secundùm Regulam $\frac{ff}{d}$ æquetur rectæ AF , & $x \propto$ rectæ AB , erit similiter recta AF major quàm AB ; ideoque B punctum inter A & F puncta, sicut dictum est, cadet. id quod ad casus quoque sequentes applicatum esto. Porro quoniam AF est $\propto \frac{ff}{d}$, erit FB (hoc est, observatâ triplici distinctione, ut prædictum est, $AB + AF$, atque etiam $AF - AB$) æqualis $x + \frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$; eaque multiplicatâ per parametrum d , sit rectangulum $dx + gff$, atque

312 E L E M. C U R V A R U M

atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ BE
2. sive yy , ac proinde $yy \propto dx$ & ff , atque $yy \propto ff - dx$.

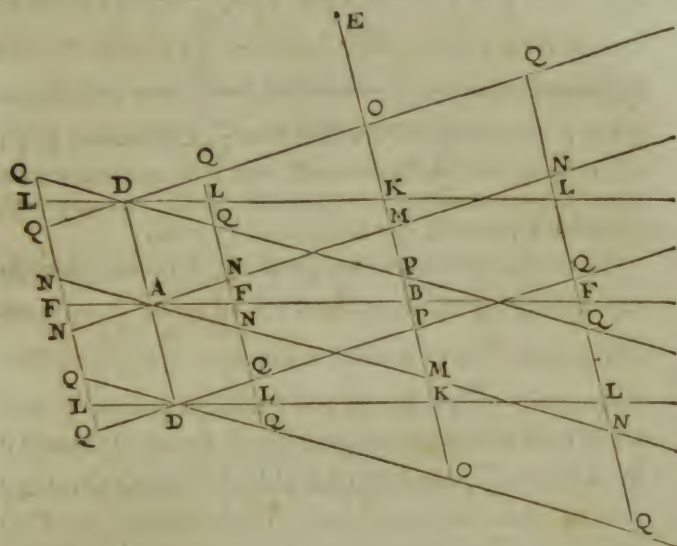
Tertio casu, ubi vertex est in puncto D, ac diameter in re-
cta DK, quoniam AD seu BK est $\propto c$: erit KE, hoc est,
BE - BK $\propto y - c$; & KBE, hoc est, BE + BK $\propto y + c$.
Cumque eo casu ζ assumpta sit pro y & c , erit KE & KBE $\propto \zeta$.
Est autem DK seu AB $\propto x$, parameterque $\propto d$, & rectangu-
lum sub dicta Parametro & recta DK contentum \propto quadrato
ex KE vel KBE. Quare cum hoc quadratum sit $\propto \zeta\zeta$, atque
3. rectangulum illud $\propto dx$, erit $\zeta\zeta \propto dx$.

Quarto casu, ubi manente diametro in recta DK vertex est
in puncto L, quoniam DL sive AF est $\propto \frac{ff}{d}$, erit LK (hoc
est, observatâ triplici distinctione juxta Regulam, DK & DL,
atque etiam LD - DK) æqualis x & $\frac{ff}{d}$, atque etiam $\frac{ff}{d} - x$.
quâ multiplicatâ per Parametrum d , fit rectangulum dx & ff ,
atque etiam $ff - dx$. quod æquale est quadrato applicatæ KE
vel KBE, hoc est, $\zeta\zeta$: eritque proinde $\zeta\zeta \propto dx$ & ff , atque
4. $\zeta\zeta \propto ff - dx$.

Quinto casu, ubi vertex est in puncto A, diameterque in
recta AM, cum sit ut a ad b , ita AB, hoc est, x , ad BM: erit
BM $\propto \frac{bx}{a}$, ideoque ME, hoc est, BE - BM $\propto y - \frac{bx}{a}$, & MBE,
hoc est, BE + BM $\propto y + \frac{bx}{a}$. Et quoniam eo casu ζ assumpta
est pro y & $\frac{bx}{a}$, erit ME & MBE $\propto \zeta$. At cum in triangulo
ABM cognita sint & angulus ABM, & ratio laterum AB,
BM, dictum angulum comprehendendum, nota quoque est
ratio reliquorum dicti trianguli laterum ad invicem, atque in
specie etiam lateris AB ad AM, quæ sit ut a ad e . Ac proinde
cum sit ut a ad e , ita AB, h.e., x ad AM: erit AM $\propto \frac{ex}{a}$. Cumque
porro juxta Regulam eo casu sit ut AM ad AB, hoc est, ut e
ad a , ita d ad Parametrum: erit Parameter $\propto \frac{ad}{e}$. Quâ multi-
plicatâ per AM seu $\frac{ex}{a}$, fiet rectangulum $\propto dx$. Quod æquale
est quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, $\zeta\zeta$; ac proin-
5. de est $\zeta\zeta \propto dx$.

Sexto

Sexto casu, ubi vertex est in puncto N, & diameter in re-
cta NM, quoniam est ut AB ad AM, ita AF ad AN, hoc est,
ut a ad e , ita $\frac{ff}{d}$ ad AN: erit AN $\propto \frac{eff}{ad}$, & NM (hoc est,
observatâ juxta Regulam triplici distinctione, AM \propto AN,
atque etiam NA — AM) æqualis $\frac{ex}{a}$ $\propto \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad}$
— $\frac{ex}{a}$. Quâ multiplicatâ per Parametrum $\frac{ad}{e}$, fit rectangu-



lum dx $\propto ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod cum æquale sit
quadrato applicatæ ME vel MBE, hoc est, zz : erit
6. $zz \propto dx \propto ff$, atque $zz \propto ff - dx$.

Septimo casu, ubi vertex est in puncto D, & diameter in re-
cta DO, quoniam AD seu MO est $\propto e$, erit OE (sive BE —
BM — MO) $\propto y - \frac{bx}{a} - e$, & OBE (sive BE + BM + MO)
 $\propto y + \frac{bx}{a} + e$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y - \frac{bx}{a} - d$,
vel pro $y + \frac{bx}{a} + d$: erit OE & OBE $\propto z$. Porro cum DO

R r seu

seu AM sit $\propto \frac{ex}{a}$, Parameterque sectionis $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum sub Parametro & recta DO contentum $\propto dx$. Cumque idem illud rectangulum æquetur quadrato applicatæ OE vel

7. OBE , id est, zz : erit $zz \propto dx$.

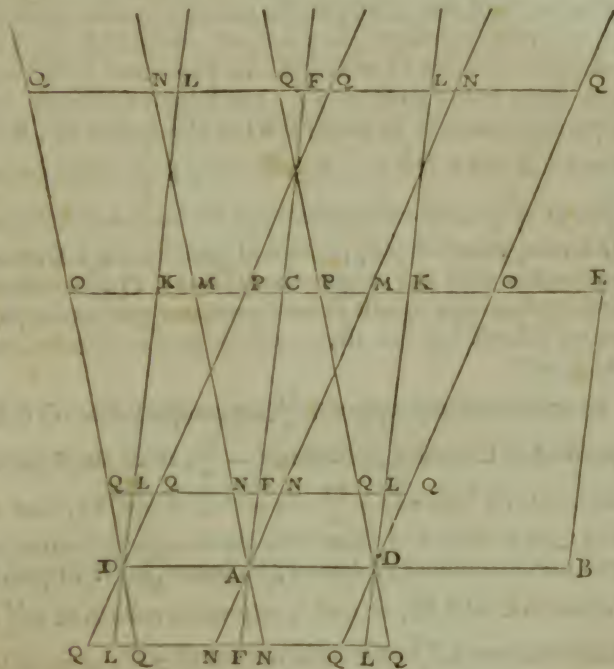
Octavo casu, ubi, manente vertice in puncto D , diameter est in recta DP , quoniam AD seu BK est $\propto c$, & $KP \propto \frac{bx}{a}$, erit PE una (sive $BE - BK + KP$) $\propto y - c + \frac{bx}{a}$, & PE altera (sive $BE + BK - KP$) $\propto y + c - \frac{bx}{a}$. Cumque eo casu z assumpta sit pro $y + \frac{bx}{a} - c$ vel pro $y - \frac{bx}{a} + c$: erit utraque $PE \propto z$. Porro cum DP seu AM sit $\propto \frac{ex}{a}$, ac Parameter $\propto \frac{ad}{e}$: erit rectangulum sub Parametro & recta DP contentum $\propto dx$. Cumque idem rectangulum æquale sit quadrato utriusque applicatæ PE , hoc est, zz : erit quoque $zz \propto dx$.

Nono casu, ubi vertex est in puncto Q , & diameter in recta QO vel QP , quoniam, ut supra, OE est $\propto y - \frac{bx}{a} - c$, atque $OBE \propto y + \frac{bx}{a} + c$; at verò PE una $\propto y - c + \frac{bx}{a}$, ac PE altera $\propto y + c - \frac{bx}{a}$, sitque eo casu z assumpta pro $y - \frac{bx}{a} - c$: erit OE , OBE , atque utraque $PE \propto z$. Et cum DO aut DP seu AM sit $\propto \frac{ex}{a}$, atque DQ seu $AN \propto \frac{eff}{ad}$: erit QO vel QP (hoc est, observatâ juxta Regulam triplici distinctione, DO vel DP & DQ , atque etiam $QD - DO$ vel DP) æqualis $\frac{ex}{a} \cdot 8 \frac{eff}{ad}$, atque etiam $\frac{eff}{ad} - \frac{ex}{a}$. Unde si eadem QO vel QP multiplicetur per Parametrum $\propto \frac{ad}{e}$, erit rectangulum $\propto dx \cdot 8 ff$, atque etiam $ff - dx$. Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato applicatæ OE , OBE , aut utriusque PE , hoc est, zz : erit quoque $zz \propto dx \cdot 8 ff$, atque $zz \propto ff - dx$. Quæ quidem omnia sunt, quæ hîc demonstranda erant.

Quod autem ad æquationes superioribus novem casibus conversim correspondentes spectat, ut lineæ Parabolicæ describantur, quæ sint Loca quæ sita: positis iisdem, ut supra, per punctum

punctum A ducenda est recta AC ipsi BE parallela, ac deinde ipsa AC, ubique considerata, ut considerata fuit recta AB in superiori figura. Porro sumpto in eadem AC puncto utcumque, veluti C, atque per id ducta recta ipsi AB parallela, veluti OCE, erit similiter hæc OCE ubique considerata, sicut considerata fuit recta OBE in præcedenti figura, nulla scilicet aliâ mutatione adhibitâ. Exempli gratiâ, si æquatio sit $dy \propto xx$, erit AC diameter, A vertex, & Paramet-

I.



ter $\propto d$. Cum enim AC seu BE sit concepta ut y , & CE seu AB ut x , rectangulumque sub Parametro & AC contentum, hoc est, dy , æquetur quadrato rectæ CE seu AB, hoc est, xx : erit, ut petitur, $dy \propto xx$.

II. Si æquatio sit $dy \cdot ff \propto xx$, sumptâ $AF \propto \frac{ff}{d}$, erit F vertex, manente diametro in recta FC, atque Parametro $\propto d$. Est

R r 2

enim

enim pro triplici juxta Regulam distinctione $FC \propto y \propto \frac{ff}{d}$,
 atque etiam $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro
 ac eadem FC contentum $\propto dy \propto ff$, atque etiam $ff - dy$.
 Quod quidem rectangulum cum æquale sit quadrato appli-
 catae CE , hoc est, xx : erit, ut petitur, $dy \cdot ff \propto xx$.

III. Si æquatio sit $dy \propto vv$, vel $dy \cdot ff \propto vv$, atque v primùm
 assumpta sit pro $x \propto c$, factâ $AD \propto c$, sumptoque puncto D ab
 A versus B , si v sit assumpta pro $x - c$; at contra ab altera
 parte, si v assumpta fuerit pro $x + c$, erit, ductâ DK ipsi AC
 parallelâ, diameter in recta DK . Et si terminus ff deficiat,

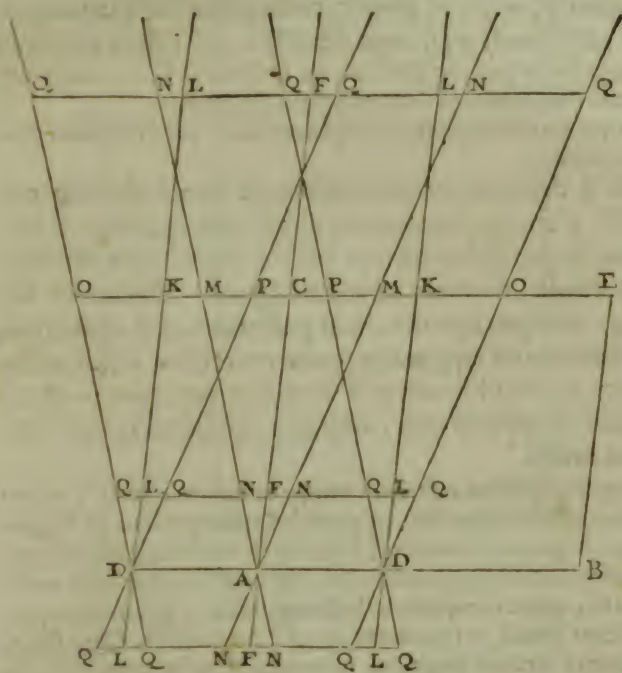
IV. erit vertex in D ; sin secus in L , cum triplici variatione, ut
 supra expositum est. Et patet, DB sive DAB , hoc est, KE
 sive KCE fore v , $DK \propto y$, atque $LK \propto y \propto \frac{ff}{d}$, atque etiam
 $\frac{ff}{d} - y$: ac proinde rectangulum sub Parametro d dictâque
 DK comprehensum $\propto dy$; at verò id quod sub d & LK com-
 prehenditur $\propto dy \propto ff$, atque etiam $ff - dy$. Quod quidem
 rectangulum cum æquale sit aut supponatur quadrato appli-
 catae KE sive KCE , hoc est, vv : erit, ut petitur, $dy \propto vv$, vel
 $dy \cdot ff \propto vv$.

V. Sit deinde v assumpta pro $x \propto \frac{by}{a}$, sumptoque in linea OCE
 puncto M à C versus E , si habeatur $-\frac{by}{a}$; at ab altera parte
 lineæ AC , si habeatur $+\frac{by}{a}$, ita ut AC sit ad CM , sicut a
 ad b : erit in recta AM diameter sectionis, ejusque vertex in

VI. puncto A , si terminus ff deficiat; sin minus, in N . Et positâ
 ratione AC ad AM , ut a ad e , ac proinde rectâ $AM \propto \frac{ey}{a}$,
 erit Parameter $\propto \frac{ad}{e}$. Est enim recta $CM \propto \frac{by}{a}$, ac proinde
 $ME \propto y - \frac{by}{a}$, atque $MCE \propto y + \frac{by}{a}$, id est, ME vel
 $MCE \propto v$. Quoniam ergo ex natura Paraboles rectangu-
 lum sub dictâ Parametro & recta AM contentum \propto quadra-
 to ex ME vel MCE , erit, $dy \propto vv$.

Porrò cum NA sit $\propto \frac{ffe}{da}$, erit $NM \propto \frac{ey}{a} \propto \frac{ffe}{da}$, atque
 etiam

etiam $\frac{ff}{a} - \frac{ey}{a}$: ideoque rectangulum sub Parametro
& recta NM contentum $\propto dy$ & ff , atque etiam $ff - dy$.
Quod quidem rectangulum cum sit \propto quadrato ex ME
vel MCE, hoc est, v ; erit quoque $dy \cdot ff \propto v$.



Sit denique v assumpta pro x & $\frac{by}{a} - c$: eritque, sup-
VII. VIII. positis iisdem quæ supra, diameter in DO, vel in DP;
IX. & si terminus ff deficiat, vertex in D; sin minus, in Q.
Et posita ratione DK ad DO, ut & DK ad DP, sicut
 a ad e , ac proinde recta DO, ut & DP $\propto \frac{ey}{a}$; erit pa-
rameter $\propto \frac{ad}{e}$. Est enim OE $\propto x - \frac{by}{a} - c$, atque
Rr; OCE

$OCE \propto x + \frac{by}{a} + c$; itemque $PE \text{ una} \propto x - \frac{by}{a} + c$, ac PE altera $\propto x + \frac{by}{a} - c$, hoc est, OE , OCE , & PE una vel altera erit $\propto y$. Estque QO vel QP (sicut supra NM) $\propto \frac{ey}{a} \& \frac{ffe}{da}$, atque etiam $\frac{ffe}{da} - \frac{ey}{a}$: ac proinde rectangulum sub Parametro & QO vel $QP \propto dy \& ff$, atque etiam $ff - dy$. Quare cum idem rectangulum æquale sit quadrato ex OE vel OCE , aut ex una alterave PE , id est, vv : erit quoque $dy \cdot ff \propto vv$.

Atque ita demonstratum est generaliter, quod hoc loco propositum fuit.

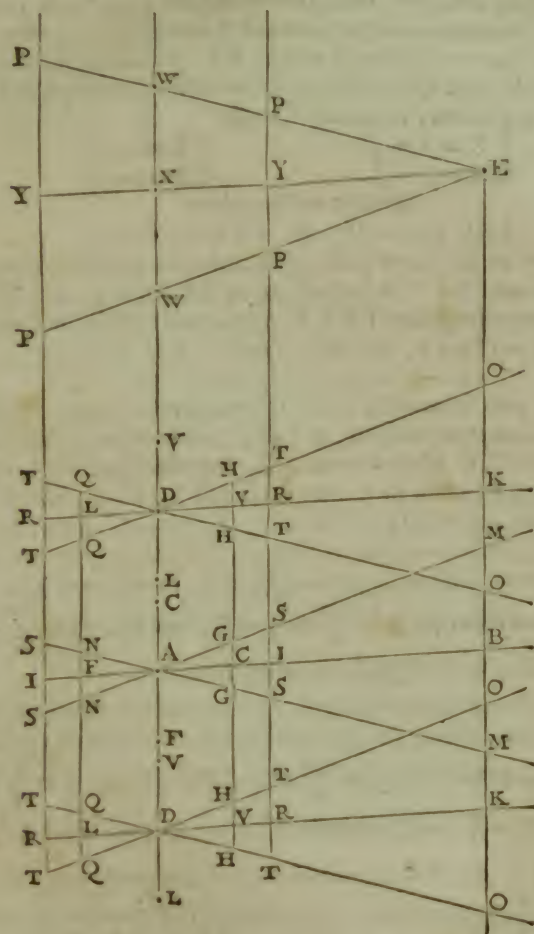
At si denique æquatio similis sit alicui formularum sub N° 3 comprehensarum, erit Locus quæsitus, si terminus in quo invenitur xx vel vv signo $+$ sit affectus, Hyperbola; sin idem terminus signo $-$ affectus sit, Ellipsis: excepto tantum, cum posteriori casu ordinatim ad diametrum applicatæ cum ea rectos angulos faciunt, & simul transversa diameter parametro est æqualis: quippe eo casu, ut patet, quæsitus Locus Circulus existit.

Et primo quidem casu, cum nempe terminus in quo xx vel vv signo $+$ affectus reperitur, ac proinde Locus quæsitus est Hyperbola, erit quoque terminus ff cum illo ab eadem æquationis parte constitutus vel signo $+$ affectus, vel contra; & si signo $-$ affectus sit, atque in æquatione habeatur fractio, ipsa majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz rejiciatur. Quo facto, remanente utraq; quantitate incognitâ primum conceptâ, sequenti formâ se exhibebit æquatio: $yy \propto \frac{lxx}{g} + ff$, (id est,

Casus unus, cum Locus est Hyperbolicus.

$yy - ff \propto \frac{lxx}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$: eritque, ut in sequenti figura, casu primo, nempe si terminus ff cum termino in quo xx unam æquationis partem constituens signo $+$ affectus sit, diameter Hyperbolæ describendæ in recta AX , quæ ducitur per punctum A positione datæ BE parallela. Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ affectus sit, uti casu secundo, erit diameter in data positione recta AB , quæ indeterminatè pro x concipitur; ita ut ad eandem

easdem diametros ordinatim applicatæ faciant angulos, dato vel assumpto angulo ABE æquales: eritque casu utroque centrum Hyperboles in puncto A , & semi-latus transversum ∞f , quod in



dictis diametris respectivè per lineas AC vel AF exprimatur. Porro si l sit ∞g , vel, quod idem est, si termino xx vel yy nulla adhæreat

hæreat fractio, erunt latera transversum & rectum sibi invicem æqualia. At verò positis l & g inæqualibus, erit ratio lateris transversi ad rectum ut l ad g .

Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum C in utraque diametro versus X & versus B respectivè; supponaturque eandem secare rectam XE , quæ ducta sit ipsi AB æquidistans, ut & ipsam BE , ad dictas diametros respectivè ordinatim applicatas, in puncto E : erit

$$\begin{array}{ll} FX \propto y + f, & FB \propto x + f, \\ CX \propto y - f, & CB \propto x - f; \end{array}$$

ideoque rectangulum

$$FXC \propto yy - ff, \text{ \& } FBC \propto xx - ff.$$

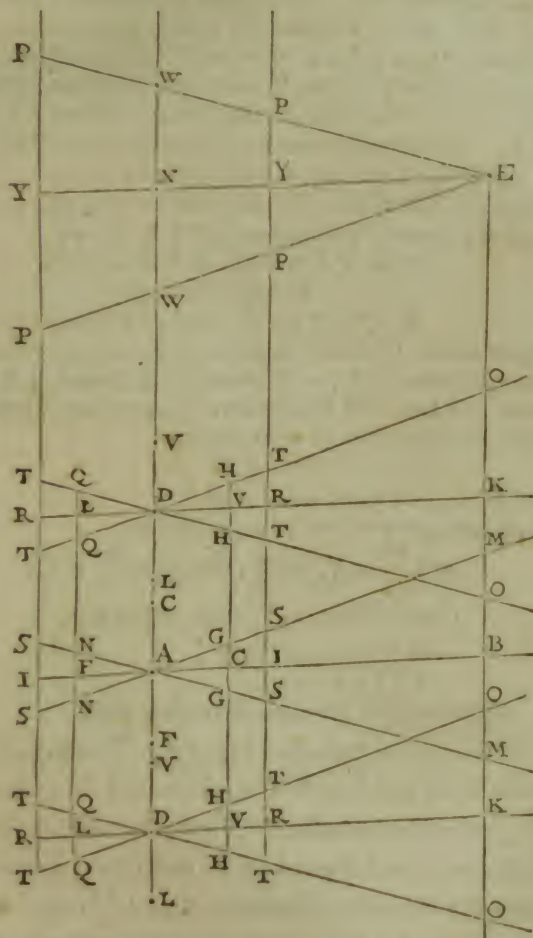
Cum autem latere recto ipsi transverso æquali existente re-
per 10 primi hujus. ctangulum FXC sit \propto quadrato ex XE seu AB , hoc est, xx ; itemque rectangulum FBC sit \propto quadrato ex BE , hoc est, yy : erit $yy - ff \propto xx$, hoc est, $yy \propto xx + ff$ itemque $xx - ff \propto yy$, live $yy \propto xx - ff$.

Sed cum secus recto latere ipsi transverso inæquali existente unius ad alterum ratio sit, ut l ad g ; similiterque etiam ratio re-
per 10 primi hujus. ctanguli FXC ad quadratum XE , aut rectanguli FBC ad quadratum BE eadem sit 2 , quæ transversi lateris ad rectum, hoc est, eadem quæ l ad g : erit ut l ad g , ita $yy - ff$ ad xx ; itemque ut l ad g , ita $xx - ff$ ad yy . hoc est, reductâ proportionem ad æqualitatem, erit $lxx \propto gyy - gff$, ut & $lyy \propto gxx - gff$. unde divisio omnibus per g , fit $\frac{lxx}{g} \propto yy - ff$, hoc est, $yy \propto \frac{lxx}{g} + ff$; & $\frac{lyy}{g} \propto xx - ff$. Quod demonstrandum erat.

Casus 2^{us}, cum Locus ej^{us} Hyperbola. At si quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ, aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $z \propto \frac{lxx}{g} + ff$ (id est, $z \propto \frac{lxx}{g} - ff$), vel $\frac{lxx}{g} \propto xx - ff$: aut z assumpta erit pro y & c , vel pro y & $\frac{bx}{a}$, aut

§. I. pro y & $\frac{bx}{a}$ & c . Et quidem primò si z assumpta sit pro y & c , ducenda est per punctum A recta AD ipsi BE parallela & $\propto c$; ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem partelincæ AB , quâ datus vel conceptus est angulus ABE . Sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum

Etum D reperiatur ab altera parte lineæ AB. Deinde per punctum D ducta recta DK ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam BE productam, si opus fuerit, in puncto K: erit describendæ Hyperbolæ



diameter, si terminus ff signo + affectus sit, in recta DX. sin
contra, hoc est, si terminus ff signo — affectus sit, in prædicta
S s recta

recta DK; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE vel DKE sive DXE æquales. Eritque casu utroque D centrum sectionis, & semi-latus transversum $\propto f$, quod in dictis diametris respectivè per lineas DV vel DL exprimatur; eritque porro transversis lateris ad rectum ratio, ut l ad g . Si enim descripta intelligatur prædicta Hyperbola per punctum V in utraque diámetro, versùs X & K respectivè, eademque secare supponatur rectam XE, ut & ipsam KE, ad dictas diametros ordinatim applicatas, in puncto E: erit DAX sive KBE $\propto y + c$, & DX seu KE $\propto y - c$; ideoque eadem DAX & KBE vel DX & KE ea ipsa, quæ pro χ est assumpta: ac propterea LX $\propto \chi + f$, & LK $\propto x + f$
atque VX $\propto \chi - f$, & VK $\propto x - f$:

ideoque rectangula

$$LXV \propto \chi\chi - ff, \text{ \& } LKV \propto xx - ff.$$

Cumque eadem sit ratio tam unius quàm alterius rectanguli LXV ad quadratum XE, ut & utriusque rectanguli LKV ad quadratum ex KE vel KBE respectivè, quæ est lateris transversis ad rectum, hoc est, ut l ad g : erit quoque ut

$$l \text{ ad } g, \text{ ita } \chi\chi - ff \text{ ad } xx,$$

$$\text{itemque ut } l \text{ ad } g, \text{ ita } xx - ff \text{ ad } \chi\chi:$$

hoc est, revocatâ proportionem ad æqualitatem,

$$\text{erit } \frac{lx}{g} \propto \chi\chi - ff, \text{ sive } \chi\chi \propto \frac{lx}{g} + ff,$$

$$\text{\& } \frac{lz}{g} \propto xx - ff: \text{ aut, si } l \text{ sit } \propto g,$$

$$\text{erit } \chi\chi \propto xx + ff,$$

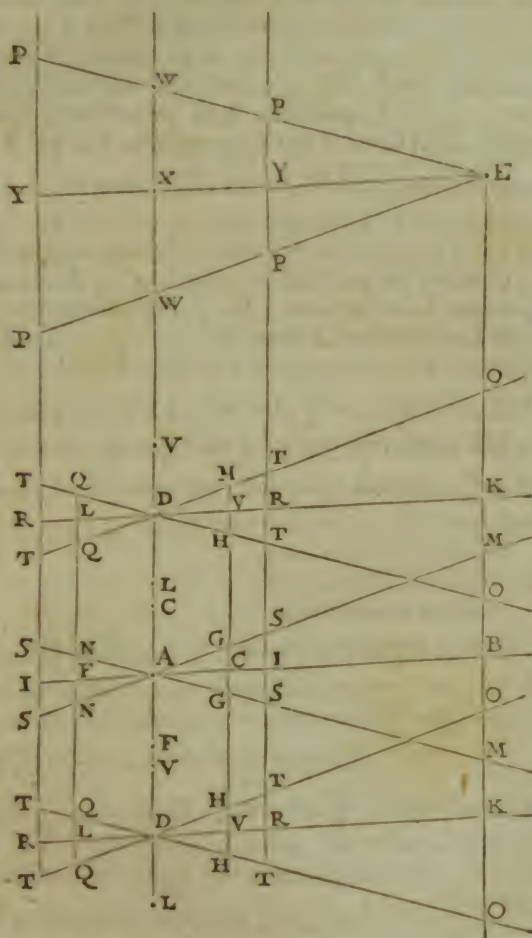
$$\text{\& } \chi\chi \propto xx - ff.$$

Quod quidem hîc demonstrandum erat.

- §. 2. At verò secundo, si χ assumpta sit pro y & $\frac{bx}{a}$, sumpto in linea BE puncto M, ita ut AB ad BM sit, sicut a ad b ; hoc est, ut BM sit $\propto \frac{bx}{a}$, (quod quidem punctum M, si χ assumpta fuerit pro $y - \frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB quâ datus vel conceptus angulus ABE sumendum est; sed contra, si habeatur $\chi \propto y + \frac{bx}{a}$, ab altera parte ejusdem lineæ AB sumi debet,) oportet per puncta A & M rectam lineam ducere AM, secantem HCH & QFQ per prædicta puncta C & F ductas ipsi BE parallelas in punctis G & N.

Quo

Quo facto, si terminus ff signo + affectus sit, erit quæsitæ Hyperbolæ diameter in recta A W ipsi B E parallela, ad quam ordinatim applicatæ, ut E W, sunt ipsi A M æquidistantes. Sin con-



tra, hoc est, si terminus ff signo — sit affectus, erit diameter in prædicta recta A M, ita ut ordinatim ad eam applicatæ cum ipsa
 S s 2 faciant

faciant angulos angulo AME vel $AMBE$ æquales: eritque tam unius quam alterius Hyperbolæ centrum in puncto A . Et quantum ad earundem latera tam transversa quam recta, erit ejus Hyperboles, quæ ad diametrum AW describitur, semi-latus transversum $\propto f$ (idque iterum exprimatur per AC vel AF), & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut aal ad ee ; posito nimirum quod ratio ipsius AB ad ductam AM sit ut a ad e ; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum AM describitur, semi-latus transversum erit AG vel AN . Quæ quidem AG vel AN erit $\propto \frac{ef}{a}$; cum sit ut AB ad AM , sive ut a ad e ; ita AC vel AF , hoc est, f , ad AG vel AN ; & ratio ejusdem transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag . Si enim prædicta Hyperbola descripta intelligatur, transiens per prædictum punctum C in diametro AW & per punctum G in diametro AM , præsupponaturque rectam ME vel WE ordinatim ad easdem diametros applicatas à prædicta Hyperbola secari in puncto E : erit MBE vel $AXW \propto y + \frac{bx}{a}$, & ME vel $AW \propto y - \frac{bx}{a}$, hoc est, AXW seu MBE , uti & AW seu ME ea ipsa erit, quæ pro z assumpta est. Est autem AM seu $WE \propto \frac{ex}{a}$, ac porro casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AW , (cùm nempe terminus ff signo $+$ est affectus) FW sive $FXW \propto z + f$,
& CW sive $CXW \propto z - f$:
ideoque rectangulum

$$FWC \text{ vel } FXWC \propto z^2 - ff, \text{ \& quadratum } WE \propto \frac{eex}{aa}.$$

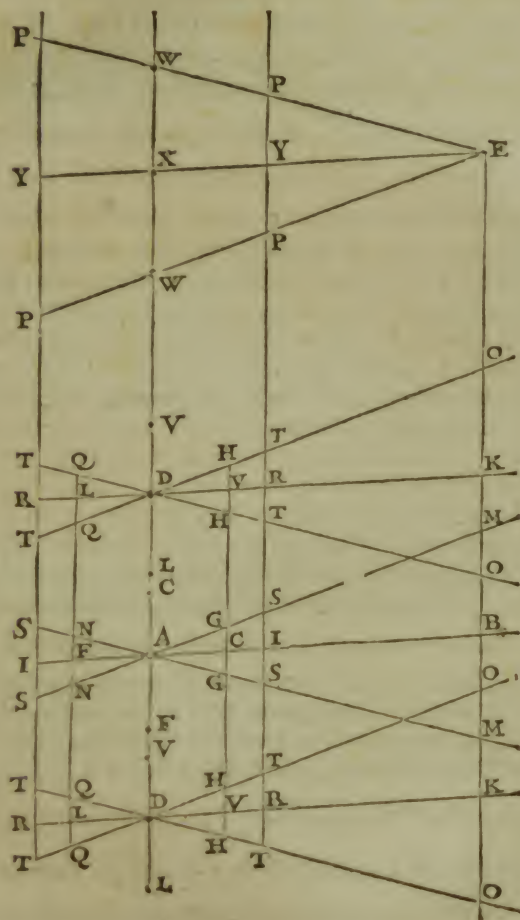
Cumque sit ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad prædictum quadratum, hoc est, eo casu ut aal ad ee , ita $z^2 - ff$ ad $\frac{eex}{aa}$: erit $eelxx \propto eegzz - eegff$, &, omnibus per ee divis, $\frac{lxx}{g} \propto zz - ff$, id est, $zz \propto \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum AM , cùm nempe terminis ff signo $-$ est affectus, erit $NM \propto \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & $GM \propto \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$: ideoque rectangulum $NMG \propto \frac{eex}{aa} - \frac{eeff}{aa}$. Cumque sit ut latus transversum ad rectum, id est, hoc casu, ut eel ad aag , ita prædictum rectangulum NMG ad

L I B. II. C A P. IV.

325

ad ME vel MBE quadratum, hoc est, ad zz : erit ut eel ad ag ,
ita $\frac{eezx - eeff}{as}$ ad zz : ac proinde $eelz \propto eegzx - eegff$.



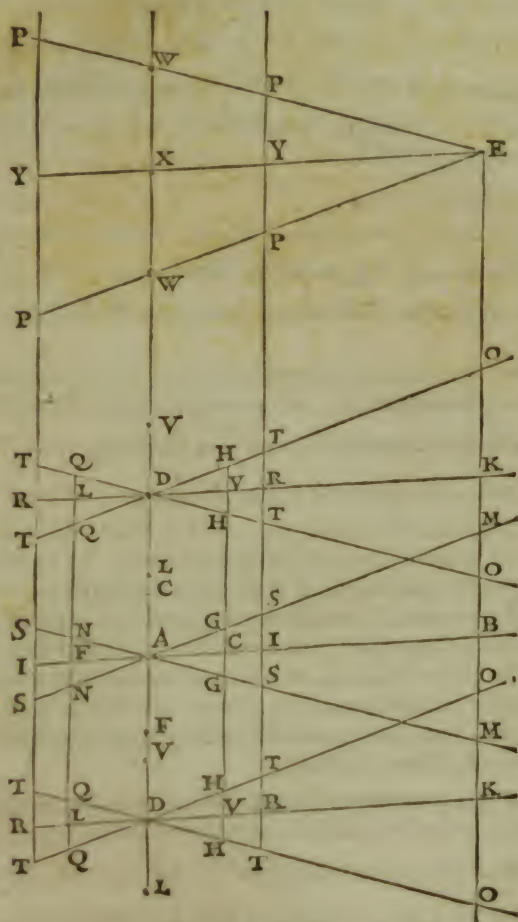
Hoc est, facta divisione per eeg , erit $\frac{lzz}{g} \propto x - ff$. Quod hic
demonstrandum erat.

Ss 3

Si

§. 3. Si denique tertio χ assumpta sit pro y $8 \frac{bx}{a} 8 c$, ductâ, ut supra, $AD \propto f$, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O ; ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b , hoc est, ut KO sit $\propto \frac{bx}{a}$, ducenda est per puncta D & O recta DO , secans prædictam HCH in H , atque occurrens præfatæ QFQ in Q . (Constat autem ex superius explicatis prædictum punctum O , si in æquatione habeatur $-\frac{bx}{a}$, ab eadem parte lineæ AB sumendum esse, quâ datus aut assumptus est angulus ABE ; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum punctum ex altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, si terminus ff signo $+$ affectus sit, erit diameter quæsitæ Hyperbolæ in recta DW . Sin contra, hoc est, si terminus ff signo $-$ sit affectus, erit ipsa in prædicta recta DO ; ita ut ad easdem diametros ordinatim applicatæ angulos faciant angulo DWE five $DXWE$, aut DOE five $DOKE$ æquales: eritque tam unius quàm alterius Hyperbolæ centrum in puncto D . Et quantum ad earundem latera tam transversa quàm recta, erit ejus Hyperbolæ, quæ ad diametrum DW describitur, hoc est, cum terminus ff signo $+$ afficitur, latus transversum $\propto f$. idque hic iterum exprimitur per DV vel DL , ac ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut aal ad eeg ; at verò Hyperboles, quæ ad diametrum DO describitur, nimirum, quando terminus ff signo $-$ affectus est, erit semi-latus transversum recta DQ vel DH , id est, $\frac{ef}{a}$; atque ratio ejusdem lateris transversi ad rectum, ut eel ad aag . Si enim descripta intelligatur Hyperbola, transiens per punctum V in diametro DW & per punctum H in diametro DO , supponaturque eandem Hyperbolam secare rectam WE vel OE in puncto E , erit $OKBE$ five $DAWX \propto y + c + \frac{bx}{a}$, & OE five $DW \propto y - c - \frac{bx}{a}$, ac OBE five $DAW \propto y + c - \frac{bx}{a}$, atque OKE vel $DXW \propto y - d + \frac{bx}{a}$. Hoc est, erunt omnes illæ prænominatæ lineæ eadem, quæ pro χ assumptæ sunt. Est autem DO seu $WE \propto \frac{ex}{a}$, ideoque quadratum $WE \propto \frac{exx}{aa}$: ac porro casu priori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DW ,

DW, cum nempe terminus ff signo $+$ afficitur, LW sive LXW $\propto \zeta + f$, & VW sive VXW $\propto \zeta - f$: ideoque rectangulum LWV sive LXWV $\propto \zeta\zeta - ff$. Cumque sit ut latus



transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum ad WE quadratum, hoc est, eo casu, ut aal ad ee , ita $\zeta\zeta - ff$ ad

constr.

$\frac{eexx}{aa}$: erit $eelxx \propto eeg\zeta\zeta - eegff$, ac, divisus omnibus per eeg ,
 $\frac{lxx}{g} \propto \zeta\zeta - ff$, sive $\zeta\zeta \propto \frac{lxx}{g} + ff$.

At verò casu posteriori, ubi descripta est Hyperbola ad diametrum DO, erit $QO \propto \frac{ex}{a} + \frac{ef}{a}$, & $HO \propto \frac{ex}{a} - \frac{ef}{a}$; ideoque rectangulum QOH $\propto \frac{eexx - eeff}{aa}$. Cumque iterum sit, ut latus transversum ad rectum, ita prædictum rectangulum QOH ad quadratum ex OKBE vel OE, sive OBE aut OKE: id est, eo casu, ut eel ad aag , ita $\frac{eexx - eeff}{aa}$ ad $\zeta\zeta$: erit quoque proinde $eel\zeta\zeta \propto eegxx - eegff$. Hoc est, divisus omnibus per eeg , erit $\frac{lxx}{g} \propto xx - ff$. Quæ quidem omnia sunt, quæ casu superiori in triplici sua distinctione determinanda ac demonstranda erant.

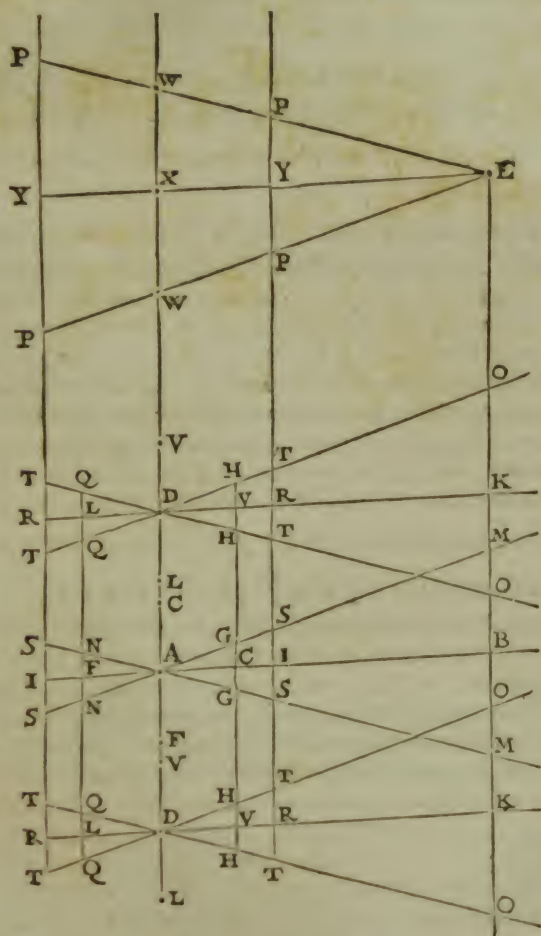
Casus 3^{ius}, cum Locus est Hyperbola.

Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum, alterâ ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundum Regulam assumptâ, æquatio sit $yy \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $yy - ff \propto \frac{lvv}{g}$) aut $\frac{lyy}{g} \propto vv - ff$; atque ipsa v tantum assumpta sit pro x & notâ aliquâ quantitate, Sit v assumpta pro x & b ; Hoc casu in linea AB vel eâdem productâ sumendum est punctum I, ita ut AI sit $\propto b$ (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - b$, ab A versùs B; Sin contra, ab altera parte puncti A in producta BA sumi debet.) Quo factò, erit idem illud punctum I centrum describendæ Hyperboles, & mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra casu 1^{mo} memoratum est, nempe, diameter in recta IY vel in recta IB, semi-latus transversum $\propto f$, atque proportio lateris transversi ad rectum, ut l ad g .

Casus 4^{us}, cum Locus est Hyperbola.

Si denique quantitatum incognitarum, primò conceptarum, utrâque ex æquatione sublatâ, aliisq; earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\zeta\zeta \propto \frac{lvv}{g} + ff$, (id est, $\zeta\zeta - ff \propto \frac{lvv}{g}$), aut $\frac{lzz}{g} \propto vv - ff$; atque ζ primùm assumpta sit pro y & c , ducenda est utrinque IR parallela BE, & $\propto c$: quo factò, erit idem illud punctum R centrum, & diameter in recta RY vel

vel RK, ejusque semi-latus transversum $\propto f$, ac ratio transver-
si lateris ad rectum, ut l ad g. quemadmodum ea omnia, mu-
tatis mutandis, casu secundo §. 1. fufius explicata sunt.



§. 2. At si χ assumpta fuerit pro y $8 \frac{bx}{a}$, erit punctum S, in
T t quo

330 E L E M. C U R V A R U M

quo M A, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel eandem productam, si opus sit, interfecatur, centrum sectionis; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2. memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta S P vel S M (atque ut ibidem A M seu E W erat $\propto \frac{e^x}{a}$, ita hîc S M seu E P erit $\propto \frac{e^v}{a}$: cum sit ut A B ad A M, hoc est, ut a ad e , ita B I, hoc est, v , ad S M); eritque porro semi-latus transversum $\propto f$ & $\frac{e^f}{a}$ respectivè, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut $a a l$ ad $e e g$, vel ut $e e l$ ad $a a g$.

§. 3. Si denique χ assumpta fuerit pro y & $\frac{b^x}{a}$ & c , erit punctum T, in quo D O, vel quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam I R, vel productam, si opus sit, interfecatur, centrum sectionis; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti, & supra casu secundo §. 3. fusiùs expositum est. Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicite est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant, excepto tantum, quòd, quæ ibidem designabantur per x , hîc sint x & b , hoc est, v . Ita enim quod ibi erat A B & E X $\propto x$, hîc est I B & E Y $\propto v$; quod ibi erat D K & E X $\propto x$, hîc est R K & E Y $\propto v$; quod ibi erat A M & E W $\propto \frac{e^x}{a}$, hîc est S M & E P $\propto \frac{e^v}{a}$; quod ibi erat D O & E W $\propto \frac{e^x}{a}$, hîc est T O & E P $\propto \frac{e^v}{a}$.

Quamvis autem secundum Regulam accidere etiam possit, ut v composita sit ex x & aliâ quâdam quantitate, cui & incognita y permixta sit; ita tamen, ut eo casu χ solummodo ex y & aliâ quantitate in totum cognitâ constare queat, haudquaquam tamen operæ pretium existimamus, casus omnes eò spectantes speciatim persequi: cum ex iis, quæ tam in Locis Parabolicis quàm in posteriori exemplo reductionis æquationum ad formulas Theorematum 12^{mi} & 13^{mi} superiùs explicata sunt, iidem illi casus per se manifesti sint atque in præcedentibus etiam omnino plenèque comprehendantur, si nimirum, substituto per omnia x loco y & vice versâ, eadem x non per rectam A B sed per eam, quæ ex A ipsi B E parallela ducta sit, atque y non per B E sed per rectam ipsi A B æquidistantem, designetur. Quòd hîc generaliter monuisse suffecerit.

Alij

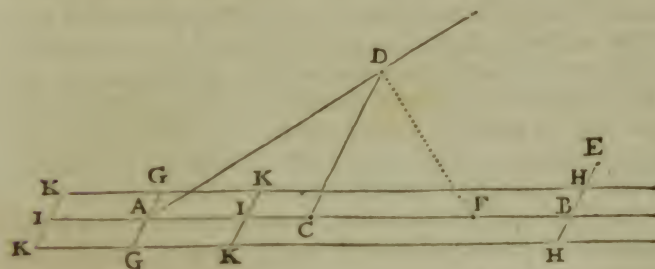
Alii quatuor casus, cum Locus est Hyperbola.

Jam verò quod supra annotavimus accidere quoque posse, ut æquatio sit

1. $y \propto ff$,
2. $z \propto ff$,
3. $y \propto ff$,
4. $z \propto ff$;

omnibusque istis casibus Locum quæsitum esse Hyperbolam, ejus determinatio sive descriptio atque demonstratio ex iis, quæ jam ante explicata sunt, sponte quoque profluunt.

Primo enim casu, si in recta AB sumatur AC $\propto f$, atque ex puncto C educât rectâ CD, quæ ipsi BE sit æquidistans & æqualis priori AC, hoc est $\propto f$, per A & D recta linea ducatur: erit A centrum Hyperbolæ, cujus axis est in recta AD, & punctum D vertex, atque AB asymptotos. sive (ductâ rectâ DF ad AD perpendiculari ac in AB terminata) erit AD semi-latus transversum, & ratio transversi ad rectum, ut AD quadratum ad DF



quadratum. Si namque prædicta Hyperbole secare supponatur rectam BE in puncto E, erit ^{per 3 primi hujus.} rectangulum ABE \propto quadrato ex AC vel CD. Quare cum AB sit $\propto x$, BE $\propto y$, & AC $\propto f$: erit $xy \propto ff$. Quod primo casu erat demonstrandum.

Secundo casu, cum nempe æquatio est $z \propto ff$, oportet ut z juxta Regulam sit assumpta pro y & notâ quâdam quantitate. Estoque

Tt 2

itaque assumpta pro y $g c$, atque idcirco ad describendam Hyperbolam ducatur per punctum A recta AG ipsi BE parallela, ac ∞c : sumpto nimirum puncto G vel ab hac vel ab illa parte lineæ AB , prout c quantitas signo $+$ vel $-$ fuerit affecta; ductâque porrò GH ipsi AB parallelâ, centro G , Asymptoto GH , cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, Hyperbolæ describatur. Hæc igitur si secare supponatur rectam BE in puncto E , erit rectangulum GHE vel $GHE \infty ff$. Unde cum sit $GH \infty x$, & HE vel $HBE \infty y$ $g c$, id est, z : erit GHE vel GHE rectangulum ∞zx , ac propterea $zx \infty ff$. Quod 2^{do} casu demonstrandum erat.

Tertio casu, nempe si æquatio sit $yv \infty ff$: v quoque tantum pro x g notâ quâdam quantitate sumpta sit oportet, veluti pro x $g h$. Ideoque ad inventionem Loci quæsit, in recta AB vel in ipsâ productâ sumenda est $A \infty h$, ac porrò centro I , atque Asymptoto IAB vel IB , cæterisque, ut supra, mutatis mutandis, describenda est Hyperbola, quæ si rectam BE secare supponatur in E : erit rectangulum $IABE$ vel $IBE \infty ff$. Quare cum IAB vel IB sit ∞x $g h$, hoc est, y , & $BE \infty y$: erit $yv \infty ff$. Quod 3^{to} casu demonstrandum erat.

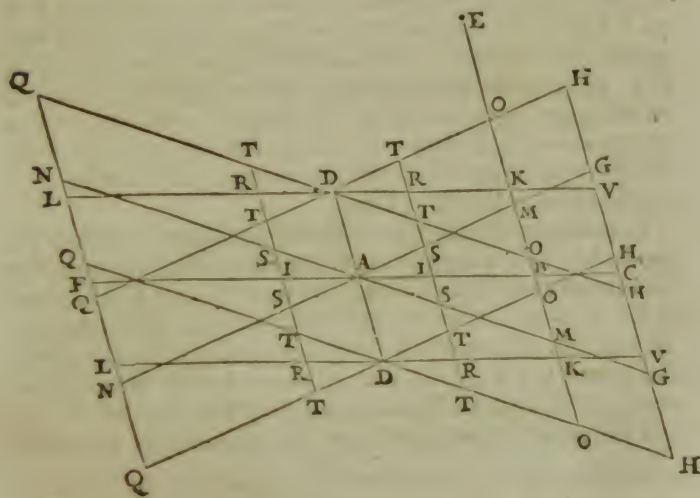
Denique quarto casu, si nempe æquatio sit $zv \infty ff$: erit z assumpta pro y $g c$, & v pro x $g h$. Ideoque per prædictum punctum I ducenda est IK ipsi BE æquidistans & ∞c ; ductâque KH ipsi AB parallelâ, centro K , atque Asymptoto KGH vel KH , cæterisque, ut casu 1^{mo}, mutatis mutandis Hyperbole describenda est, quæ si secare supponatur rectam BE in E : erit rectangulum $KGHE$ vel KHE , ut & $KGHE$ vel $KHE \infty ff$. Hinc cum HBE vel HE sit ∞y $g c$, id est, z , & KGH vel $KH \infty x$ $g h$, hoc est, v : erit $zv \infty ff$. Quod 4^{to} casu demonstrandum erat.

Atque hæc quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Locorum eo casu, quo iidem sunt in linea Hyperbolica, considerata veniunt.

Altero autem casu generali formularum sub N^{ro} 3. comprehensarum, cum nempe terminus, in quo invenitur xx vel vv signo $-$ sit affectus, ac proinde Locus quæsitus vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, si in æquatione fractio reperiatur, rejici quoque illa poterit majoris perspicuitatis gratiâ in terminum yy vel zz . Quo facto primò, remanente utrâque quantitate inco-

incognitâ ab initio conceptâ, sequenti formulâ se exhibebit æ-
quatio $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$: eritque, ut in sequenti figura, describendæ *Casus unus,*
Ellipseos diameter in rectâ AB, quæ pro x indeterminatè est *clm Locus*
concepta, ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ cum *vel Ellipse*
ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE æquales; ac *vel Circuli*
centrum in puncto A, & semi-latus transversum $\propto f$. id quod in *circumfe-*
dicta diametro per lineam AC vel AF exprimitur, eritque ratio *rentia exi-*
ejusdem transversî lateris ad rectum, ut l ad g . *stus.*

Si enim descripta intelligatur prædicta Ellipsis, transiens per
puncta C & F, secansque applicatam BE in puncto E: erit FB
 $\propto f + x$, & BC $\propto f - x$: ideoque rectangulum FBC $\propto ff - xx$.
At cum ex natura Ellipseos, lateribus recto transversoque æqua-
libus, prædictum rectangulum FBC sit \propto quadrato ex BE, *per 13 pri-*
hoc est, yy : erit quoque proinde eo casu $yy \propto ff - xx$. Et facile *mi hujus.*



apparet, si, iisdem positis, BE super rectam FC foret quoque
perpendicularis, hoc est, ut angulus quem ordinatim applicatæ
faciunt ad diametrum sit rectus, prædictam curvam fore Circuli
circumferentiam.

Cum autem porro, lateribus transverso rectoque inæqualibus
T t 3 atque

^{per 13 primi hujus.} atque in ratione ut l ad g , eadem sit ratio ¹ rectanguli $FB C$ ad $B E$ quadratum, quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g : ex prædictis palàm est fore ut l ad g , ita $ff - xx$ ad yy , hoc est, esse $\frac{lyy}{g} \propto ff - xx$. Quod eo casu demonstrandum erat.

Casus 2^{us}, cum Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. At si, quantitatum incognitarum primò conceptarum unâ ex æquatione sublatâ aliâque in ejusdem locum juxta Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \propto ff - xx$: aut z assumpta erit pro y & c , aut pro y & $\frac{bx}{a}$, aut pro y & c & $\frac{bx}{a}$.

§. 1. Et primùm quidem, si z assumpta fuerit pro y & c , ducenda est per punctum A recta AD ipsi $B E$ parallela ac $\propto c$, ita ut, si z fuerit assumpta pro $y - c$, prædictum punctum D cadat ab eadem parte lineæ AB , quâ datus vel conceptus est angulus ABE ; sin contra z fuerit assumpta pro $y + c$, idem illud punctum D ab altera parte lineæ AB reperiatur. Deinde ductâ per D rectâ DK ipsi AB parallelâ, quæ secet rectam $B E$, productam versùs B , si opus fuerit, in puncto K , erit quæsitæ Ellipseos diameter in recta DK , ad quam ordinatim applicatæ cum ea angulos faciant, dato vel assumpto angulo ABE seu $DK E$ æquales. Punctum autem D centrum erit, & semi-latus transversum $\propto f$. quod in dictis diametris per lineas $D V$ & $D L$ exprimatur, eritque ratio transversi lateris ad rectum, ut l ad g .

Si enim prædicta Ellipsis descripta intelligatur transiens per puncta L & V , quæ supponatur secare rectam $B E$, ad prædictam diametrum ordinatim applicatam, in puncto E : erit $K B E \propto y + c$, & $K E \propto y - c$, ideoque eadem $K B E$ vel $K E$ ea ipsa, quæ pro z assumpta est. Cumque $L K$ sit $\propto f + x$, & $K V \propto f - x$: erit rectangulum $L K V \propto ff - xx$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli $L K V$ ad quadratum ex $K B E$ vel $K E$, hoc est, ad zz , quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, ut l ad g : erit ut l ad g , ita $ff - xx$ ad zz , hoc est, erit $\frac{lzz}{g} \propto ff - xx$. Quod quidem, si l sit $\propto g$, idem est ac $zz \propto ff - xx$. Atque hîc iterum facilè apparet, quòd, existente angulo $DK B E$ vel $D K E$ recto, & $l \propto g$, hoc est, rectangulo $L K V \propto K E$ quadrato, prædicta curva Circulus sit futura.

§. 2. At verò, si z assumpta fuerit pro y & $\frac{bx}{a}$, sumpto in linea $B E$,
pro-

$\propto g$, sive, quod idem est, si termino $\chi\chi$ nulla adhæreat fractio, ut ee ad aa , hoc est, ut AM quadratum ad quadratum AB .

Etenim si prædicta Ellipsis descripta intelligatur, transiens per N & G , supponaturque eandem secare rectam ME vel MBE , ad prædictam diametrum ordinatim applicatam in puncto E : erit eadem $ME \propto y - \frac{bx}{a}$, & $MBE \propto y + \frac{bx}{a}$, ac

proinde ea ipsa, quæ pro χ assumpta est. Cumque AM sit $\propto \frac{ex}{a}$, erit $NM \propto \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & $MG \propto \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: ideoque rectangulum $NMG \propto \frac{eff}{aa} - \frac{exx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti re-

ctanguli NMG ad quadratum ex MBE vel ME , quæ est lateris transversi ad rectum, hoc est, eadem quæ eel ad aag : erit quoque ut eel ad aag , ita $\frac{eff - exx}{aa}$ ad $\chi\chi$, ac proinde $eel\chi\chi$

$\propto eegff - eegxx$. id est, factâ divisione per eeg , erit $\frac{lzx}{g}$

$\propto ff - xx$. sive, posita $l \propto g$, $\chi\chi \propto ff - xx$. Unde ex ante dictis iterum apparet, quod si angulus $AMBE$ vel AME rectus sit, ac simul $eel \propto aag$, hoc est, rectangulum $NMG \propto$ quadrato ex ME vel MBE , prædictam curvam fore Circulum, cuius centrum sit A , & semi-diameter AN vel AG .

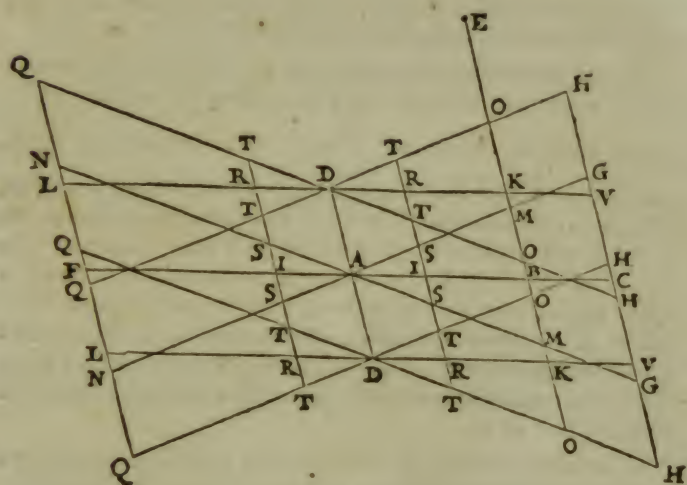
- §. 3. Denique si tertio χ assumpta sit pro y $g \propto \frac{bx}{a}$, ductâ, ut supra, $AD \propto f$, & DK ipsi AB parallelâ, sumptoque in linea KE puncto O , ita ut DK ad KO sit, sicut a ad b , hoc est, ut KO sit $\propto \frac{bx}{a}$: ducenda est per puncta D & O recta $QDOH$, secans prædictam HCH in H , atque occurrens præfatæ QFQ in Q . (constat autem ex iis, quæ jam sæpius monita sunt, si habeatur $-\frac{bx}{a}$, prædictum punctum O ab eadem parte lineæ DK , quâ datus vel assumptus est angulus DKE , sumendum esse; at si habeatur $+\frac{bx}{a}$, illud ipsum ab altera ejusdem lineæ parte sumi debere.) Quo facto, erit describendæ Ellipseos diameter in prædicta recta QDH , ita ut ad eandem diametrum ordinatim applicatæ

LIB. II. CAP. IV.

337

plicatæ cum ea angulos faciant, angulo $DOKE$ vel DOE æquales. Porro centrum erit in D , & semi-latus transversum DQ vel $DH \propto AN$ seu $\frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut cel ad aag .

Si enim quæsitæ Ellipsis descripta intelligatur, transiens per puncta Q & H , eademque secare supponatur rectam OE vel OKE in puncto E : erit $OKBE \propto y + e + \frac{bx}{a}$, $OE \propto$



$y - e - \frac{bx}{a}$, $OBE \propto y + e - \frac{bx}{a}$, & $OKE \propto y - e + \frac{bx}{a}$: ac proinde prænominatæ illæ lineæ eadem erunt, quæ pro ζ assumptæ sunt. Cumque porro sit DO seu $AM \propto \frac{ex}{a}$, ideoque $QO \propto \frac{ef}{a} + \frac{ex}{a}$, & $OH \propto \frac{ef}{a} - \frac{ex}{a}$: erit rectangulum $QOH \propto \frac{eff - exx}{aa}$. At cum eadem sit ratio dicti rectanguli QOH ad

ad quadratum ex O K B E vel O E, aut ad quadratum ex O B E vel O K E, quæ est transversæ lateris ad rectum, hoc est, ut eel ad aag : erit quoque ut eel ad aag , ita $\frac{eeff-eeex}{aa}$ ad $\chi\chi$; ac propterea $eel\chi\chi \propto eegff - eegxx$, &, divisis omnibus per eeg , $\frac{lzz}{g} \propto ff - xx$. id est, si l sit $\propto g$, erit $\chi\chi \propto ff - xx$.

Atque hinc iterum facillè apparet, si angulus D O K B E, D O E, D O B E, vel D O K E rectus foret, & simul $eel \propto aag$, prædictam curvam fore Circulum. Quæ quidem omnia sunt, quæ supra dicto casu in triplici sua variatione demonstranda erant.

Casus 3^{us}, cum Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia. Si verò quantitatum incognitarum ab initio conceptarum altera ex æquatione sublatâ, aliâque ejusdem loco secundum Regulam assumptâ, æquatio sit $\frac{lyy}{g} \propto ff - vv$, atque ipsa v assum-

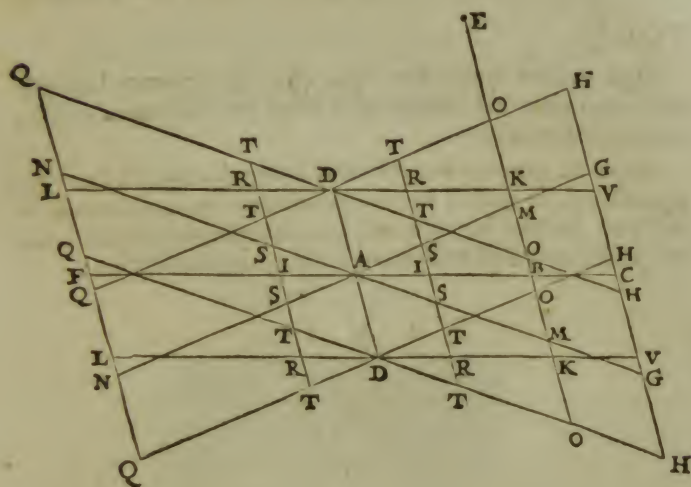
pta sit pro x & notâ aliquâ quantitate; Sit v assumpta pro x & h , eritque eo casu in linea A B vel A F sumendum punctum I; ita ut A I sit $\propto h$. (quod quidem punctum I, si v assumpta fuerit pro $x - h$, ab A versùs B; sin contra ab A versùs F sumi debet.) Quo facto, erit idem punctum I centrum describendæ Ellipseos, &, mutatis mutandis, cætera omnia, ut supra, casu primo memoratum est. Hoc est, diameter erit in recta I B, ac semi-latus transversum erit $\propto f$, atque ratio transversæ lateris ad rectum, ut l ad g .

Casus 4^{us}, cum Locus est vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit. Si denique quantitatum incognitarum primum conceptarum utrâque ex æquatione sublatâ, aliisquæ earundem loco juxta Regulam assumptis, æquatio sit $\frac{lzz}{g} \propto ff - vv$; atque z primum assumpta sit pro y & c , ducenda est utrinque I R, parallela ipsi

§. 1. B E, ac $\propto c$. Quo facto, erit idem punctum R centrum Ellipseos, & diameter ejus in recta R K vel R L, eritque ejus semi-latus transversum $\propto f$, ac ratio transversæ lateris ad rectum, ut l ad g . quemadmodum ea omnia Casu 2^{do} §. 1, mutatis mutandis, fusiùs explicata sunt.

§. 2. At si z assumpta fuerit pro y & $\frac{bx}{a}$, erit punctum S, ubi M A, vel,

vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opus fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & cætera omnia, mutatis mutandis, ut supra casu secundo §. 2 memoratum est. Nempe erit sectionis diameter in recta SM, (atque ut ibidem erat $AM \propto \frac{ex}{a}$, ita hîc SM erit $\frac{ev}{a}$: cum sit ut BA ad AM, hoc est, ut a ad e , ita BI, id est, v , ad SM:) eritque porro semi-latus transf-



versum $\propto \frac{ef}{a}$, & ratio transversæ lateris ad rectum, ut ee ad aa .

§. 3. Denique si χ assumpta fuerit pro y & e $\frac{bx}{a}$, erit punctum T, in quo DO, vel, quæ ipsi in directum adjungitur, per prædictam IR, productam, si opus fuerit, intersecatur, centrum Ellipseos; & reliqua omnia, mutatis mutandis, ut paragrapho præcedenti ac supra casu secundo §. 3

Vu 2

fusiùs

340 ELEM. CURVAR. LIB. II. CAP. IV.

fusiùs explicatum est. Nempe erit diameter in recta TO , & semi-latus transversum $\propto \frac{ef}{a}$, ac ratio transversi lateris ad rectum, ut eel ad aag . Atque eorum omnium demonstratio in præcedentibus explicite est comprehensa, cum termini & quantitates omnes hîc cum prioribus conveniant; excepto tantum, quod quæ ibidem designabantur per x hîc designentur per xgh , hoc est, v . Ita enim quod ibi erat $AB \propto x$, hîc est $IB \propto v$; quod ibi erat $DK \propto x$, hîc est $RK \propto v$; quod ibi erat $AM \propto \frac{ex}{a}$, hîc est $SM \propto \frac{ev}{a}$; & quod ibi erat $DO \propto \frac{ex}{a}$, hîc est $TO \propto \frac{ev}{a}$.

Quæ quidem omnia sunt, quæ circa inventionem Loci illo casu, quo idem vel Ellipsis vel Circuli circumferentia existit, considerata veniunt.

Atque ita generali Regulâ casus omnes inveniendi Loca per æquationes, in quibus neutra quantitatum incognitarum in se ducta nec factum sub iisdem ad tres dimensiones ascendit, sed vel quadratum vel planum non excedit, complexi sumus.

F I N I S.

FRANCISCI à SCHOOTEN,
LEIDENSIS,
dum viveret in Academia Lugduno-Batava
Matheseos Professoris,
TRACTATUS
DE
CONCINNANDIS
DEMONSTRATIONIBUS
GEOMETRICIS
ex Calculo Algebraico.

In lucem editus
à
PETRO à SCHOOTEN,
Francisci Fratris.



AMSTELÆDAMI,
Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios,
c15 15c 1x1.

*Nobilissimis & Splendidissimis Viris, Academia Lugdunensis
Curatoribus vigilantissimis,*

D. AMELIO à BOUCHORST, Wimmenumi
Domino, de Ordine Equestri in Delegatos Præpoten-
tium Hollandiæ Ordinum adscripto, & ejusdem ho-
noratissimi Collegii Præsidi, Rhenolandia Aggerum
Comiti, &c.

D. GERARDO SCHAEF, J. C. Cortenhoevii
Domino, Exlegato ad Serenissimos Daniae Sueciaeque
Reges, antehac in Confessu Ordinum Generalium &
Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Dele-
gato, Magnificæque Reip. Amstelædamensis Excon-
suli, & nunc Ærarii urbani Præfecto.

D. CORNELIO DE BEVERE, Equiti Aurato,
Strevelshoeckii, West-isselmondæ, Lindæ, &c. Domi-
no, Exlegato ad Serenissimos Magnæ Britannia Da-
niæque Reges, Exconsuli primæ in Hollandiâ Dor-
drechtanorum Urbis, in Concilio Præpotentium Hol-
landiæ Ordinum ordinario Assessori.

EORUMQUE COLLEGIS,

Amplissimis, Spectatissimisque, florentissima Reipublica Leidenfis Consulibus,

D. CORNELIO à BUYTEVEST.

D. GUILHELMO PAETS, J. C. Aggerum
Rhenolandia Chomarcho, &c.

D. PAULO à SWANENBURG, J. C. in Præ-
potentium fœderati Belgii Ordinum Confessu Hollandiæ no-
mine Delegato & Assessori.

D. RIPPARDÒ à GROENENDYCK, J. C.

NEC NON

Amplissimo, Consultissimoque Viro,

D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN, J. C.
Reip. Leidenfis Syndico, & DD. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

*Nobilissimi atque Amplissimi Viri, Domini
plurimum honorandi,*

Geminam assequendæ veritatis metho-
dum, quarum altera Synthetis sive Com-
positio dicta, altera Analysis vocata sive
Resolutio, cum primis in Mathesi à Ve-
teribus frequentatam tritamque fuisse,
palam faciunt celebria eorundem mo-
numenta. Quorum imitari exempla cupiens meus p. m.
Frater, postquam methodo Synthetica scientiæ hujus
præclara multa publicis tam scriptis quam prælectioni-
bus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissi-
mam inveniendi artem, ejusque perficiendæ rationem
sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque
omnia, quæ Veteribus tantum gloriæ peperissent, Ana-
lyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quæ illi, ut
inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc ar-
tificio & suppresso, vulgari tantum Syntheticeos forma ex-
hibuissent. Sed cum Veterum dissimulatione factum vi-
deret, hunc Analyticae methodi præstantem usum non
modo à multis ignorari ac negligi, sed ipsam ejus certi-
tudinem ac evidentiam à nonnullis suspectam haberi,
atque adeo soli Synthesi miserando labore inhæreretur:
consultum judicavit hac peculiari diatriba ostendere,
ipsum quoque Syntheticum demonstrandi modum in
Analyfi contineri, atque ex ea elici posse; ut eo argu-
mento quemvis convinceret, quantum illa & prævaleat,
& præferenda sit. Sed vix huic tractatui supremam im-
posuerat manum, cum, prohi dolor, vita ejus, atque
omnis reliqua de eo expectatio, intercedente fato ab-
rupta fuit. At vero, ut posthumus idem atque novissi-
mus industriæ ejus sætus in publicam lucem, cui desti-
natus erat, rite & honeste prodire posset: ego, ut defun-
cti

Et si frater unicus , mei esse officii atque pietatis existima-
vi , non tantum in me recipere editionis promovendæ ac
juvandæ curam ; sed etiam pro veneratione & observan-
tia , quæ vobis , Nobilissimi atque Amplissimi Domini , ju-
re multiplici debetur , eundem foetum inclytæ dignitati
vestræ ac honori consecrare. Utique futurum spero , ut
cujus ingenii primitias , illustribus vestris nominibus olim
inscriptas , propitia benignitate excepistis , hunc quoque
ultimum ejusdem fructum gratiose suscipiatis. Neque so-
lita humanitas vestra ob stare sinet meam offerentis te-
nuitatem , qui simul hoc quantulocunque conatu pro
vestris non modo in Fratrem , sed etiam in p. m. Paren-
tem meum , longi temporis beneficiis meritisque gratum
animum profiteri ac testari exoptem. Quod quidem
pro illis , meque ipso , luculentius aliquando me factu-
rum confido , si & mihi , à prima ætate similibus stu-
diis innutrito , benevolentia & favoris vestri auram
aspirare contingat. Interim D E U M O P T. M A X.
suppliciter oro , ut consilia vestra & pro Reip. salute
atque Academiae decore curas secundet , optimisque suc-
cessibus donet.

Vestrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

P E T R U S à S C H O O T E N .

FRAN-

FRANCISCI à SCHOOTEN

Tractatus

De concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

LECTORI S.

Quoniam, quæ in Tractatu hoc docentur, evidentius per exempla quàm præcepta explicari atque intelligi possunt: sufficere iudicavi variis diversorum generum exemplis rem apertissimè exponere, candidèque impertiri. Vale.

P R O B L E M A.

Datam rectam AB, utcunque sectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum sub AD, DB comprehensum æquetur quadrato rectæ CD. *Vide sequentem figuram.*

Series Analyseos sive Resolutionis.

Supposito Problemate ut jam factò,

voco AC. a CB. b & BD vel DE. x : eritque AD. $a+b+x$, & CD. $b+x$.

Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico AD. $a+b+x$ per BD vel DE. x

Eritque rectangulum sub AD, DB comprehensum, hoc est, $\square ADE F. ax+bx+xx$.

Xx

Si-

Similiter, multiplico CD. $b + x$
per CD vel DG. $b + x$

$$\begin{array}{r} + \quad bx + xx \\ bb + \quad bx \end{array}$$

Et fit quadratum ex CD, hoc est, $\square CDGH$. $bb + 2bx + xx$.

Unde talis emergit æquatio

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque $bx \& xx$,

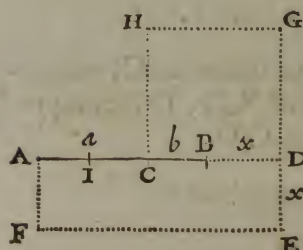
$$\text{eritque } ax \propto bb + bx. \dagger$$

Deinde transferatur bx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una & cognitæ ab altera parte habeantur,

$$\& \text{ fit } ax - bx \propto bb.$$

Cujus utraque pars si dividatur per $a - b$,

invenietur $x \propto \frac{bb}{a-b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $a - b$ ad b , ita b ad x .



Id quod docet, ad producendam AB usque ad D, qualis requiritur, sumendam esse CI æqualem CB, ita ut AI sit $\propto a - b$; ac deinde ad AI & IC vel CB, hoc est, ad $a - b \& b$, esse inveniendam 3^{tiam} proportionalem BD.

Unde tale formari poterit Theorema, supponendo rectangulum ADBB quadrato ex CD æquale esse.

Si AB producat ad D, ita ut rectangulum ADBB sit æquale quadrato ex CD: erit AC major quàm CB, & excessus AI ad IC vel CB eandem habebit rationem, quam CB ad BD.

Cujus demonstratio eodem ordine procedit quo Analysis, sequendo nimirum ejusdem vestigia, hoc pacto:

Cum

Cum enim ex hypothesi $\square ADB$ sit æquale \square^{to} ex CD ,

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx$$

ablato utrinque \square^{lo} sub CD & DB ,
 $bx + xx$

erit \square sub AC & DE æquale \square^{lo} sub CD & CB b .
 $ax \propto bb + bx$.

a per 1 se-
cundi.
b per 2 se-
cundi.

Rursus auferatur utrinque \square sub IC vel CB & BD , id est, bx ,

eritque \square sub AI & BD æquale \square^{to} ex CB d .
 $ax - bx \propto bb$.

c per 1 se-
cundi.
d per 3 se-
cundi.
e per 17
sexti.

Hoc est, resoluta æqualitate in proportionem, erit
 ut AI ad IC vel CB , ita CB ad BD .

$a - b \text{ — } b \text{ — } b / x$. Quod erat propositum.

Quoniam autem præstare videtur, loco horum equalium reſtangularum considerare laterum proportionem, quandoquidem in demonstrationibus Geometricis, ubi hæ æqualitates vel proportionēs schematum contemplationi insuper sunt astringendæ, linearum hæc inter se collatio simplicior est censenda quàm planorum aut solidorum, ipsaq; etiam figuras requirit minus intricatas, vel saltem ratiocinationes, quæ circa illas fiunt, magis liberas reddit: idcirco convertenda erit æqualitas in proportionem atque hæc eòusque continuanda varièq; transmutanda, utendo sc. ad id modis argumentandi libro 5^o Elementorum expositis, donec appareat quæsitum ex tribus prioribus proportionis terminis constare seu inveniri posse. Quod ipsum ut reſtius percipiatur, visum nobis fuit aliam præcedentis Theorematis demonstrationem hic asserre, qualis illa à principio usque ad finem per proportionalia procedit, & prioribus æqualitatibus ad amussim respondet.

Etenim cum ex hypothesi sit

$$\square ADB \text{ æquale } \square^{to} \text{ ex } CD:$$

$$ax + bx + xx \propto bb + 2bx + xx:$$

xx

Erit

f per 17
sexsi.

Erit f , resolvendo æqualitatem in proportionem,
ut AD ad CD, ita CD ad BD.

$$a+b+x \text{ --- } b+x \text{ --- } b+x / x.$$

Hinc cum sit

ut totum AD ad totum CD,

$$a+b+x \text{ --- } b+x$$

ita ablatum CD ad ablatum BD:

$$b+x \text{ --- } x$$

g per 19
quinti.

erit etiam s

reliquum AC ad reliquum CB, ut ablatum CD ad ablatum BD.

$$a \text{ --- } b \text{ --- } b+x / x.$$

h per 17
quinti.

Et dividendo h

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD

$$a-b \text{ --- } b \text{ --- } b / x. \text{ ut proponeretur.}$$

Hinc, ut Problemati huic sit locus, patet, rectam AC ipsam CB debere esse majorem; atque adeo hanc conditionem Problemati esse præfigendam, cum sine eâ constare nequeat, si velimus ut quæsitum ex datis inveniat, utpote ad quod obtinendum BC ex CA est subtrahenda.

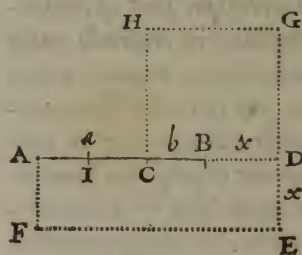
Idem etiam liquet, supponendo AC æqualem aut minorem quam CB. Nam AC æquali existente ipsi CB, non posset rectangulum ADB quadrato ex CD quadrato ex CB ei tantum æquale esse: cum illud una cum quadrato ex CB ei tantum æquale existat. Et quidem si AC ipsam CB minor sit, manifestum est, rectangulum ADB quadrato ex CD tunc adhuc multo minus fore.

Cum igitur constet Determinatio, Problema constructur hoc modo:

Constructio.

Assumptâ CI æquali CB, si fiat ut reliqua AI ad IC vel CB, ita CB ad BD: dico rectangulum ADEF, quod

7.



i per 6 se-
cundi.

quod sub AD & DB seu DE comprehenditur, æquale esse quadrato CDGH, à recta CD descripto.

Quod ipsum retrogrado ordine sit manifestum, incipiendo ab Analyseos fine & per ejusdem vestigia redeundo ad illius principium.

Finis Compositionis.

habebitur &

□ sub AD & DB seu ADEF æquale □^{to} ex CD seu CDGH.
 $ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$

Quod erat faciendum.

Rursus addito utrinque □^{lo} sub CD & DB, id est, $bx + xx$,

fiet ^m □ sub AC & DB æquale □^{lo} sub CD & CB ⁿ.
 $ax \quad \infty \quad bb + bx.$

Deinde addito utrinque □^{lo} sub IC vel CB & BD, id est, bx , ut in alteram transeat partem,

erit ^o □ sub AI & BD æquale □^{to} ex CB.
 $ax - bx \quad \infty \quad bb.$

revocatâ proportionem ad æqualitatem,

ut AI ad IC vel CB, ita CB ad BD:

$$a - b \quad \text{---} \quad b \quad \text{---} \quad b \quad / \quad x$$

Etenim cum ex Constructione sit

Principium Compositionis.

Alia ejusdem Problematis Compositio, per vestigia proportionalium secundæ Resolutionis regrediens.

Finis Compositionis.

erit ^p □ sub AD & BD seu ADEF æquale □^{to} ex CD seu CDGH. ^{p per 17}
 $ax + bx + xx \quad \infty \quad bb + 2bx + xx.$ ^{sexta.}

Quod erat faciendum.

id est, revocatâ proportionem ad æqualitatem,

Xx 3

erit

NOTA
 Hujus atque
 sequentium
 Problematum
 Compositiones
 retro
 legendas esse.
 k per 1 se-
 cundi.
 l per 2 se-
 cundi.
 m per 1 se-
 cundi.
 n per 3 se-
 cundi.

o per 17
 sexta.

q per 12
quinti.

erit etiam q

ut AD summa antec. ad CD summā conf., ita CD una antec. ad BD unam conseq.

$$\frac{a+b+x}{b+x} = \frac{b+x}{x} \quad \text{ita CD antec. ad BD consequentem:}$$

Hinc cum sit ut A C antec. ad C B conseq.,

$$\frac{a}{b}$$

ut A C ad C B, ita C D ad B D.

$$\frac{a}{b} = \frac{b+x}{x}$$

erit componendo r

ut A I ad I C vel C B, ita C B ad B D:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{b}{b+x}$$

r per 18
quinti.

Cum enim ex constructione sit

Principium Compositionis

His igitur ita se habentibus, si velimus, ut, neglecto artificio, quo tum Constructio Problematis, tum ejus demonstratio fuit inventa, tantummodo constet, allatā Constructione quæsitum semper obtineri: poterimus, calculi vestigiis nunc prætermittis, hujusmodi ad id afferre demonstrationem.

Demonstratio.

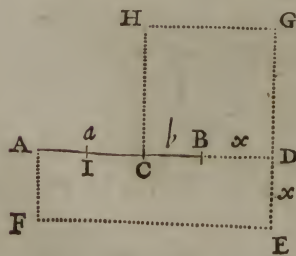
s per 17
sextri.

t per 1 secundum.
u per 3 secundum.

x per 1 secundum.
y per 2 secundum.

Cum enim ex constructione A I sit ad I C vel C B, sicut C B ad B D: erit ^r rectangulum sub extremis A I & B D æquale quadrato mediæ C B. Quibus si addatur commune rectangulum sub I C vel C B & B D, erit & ^r rectangulum sub A C & B D æquale rectangulo sub C D & C B. His igitur si rursus addatur commune rectangulum sub C D & D B, erit similiter ^x rectangulum sub A D & D B seu A D E F ^y æquale quadrato ex C D. Quod erat faciendum.

Vel



Vel etiam sic :

Cum ex constructione AI sit ad IC vel CB , sicut CB ad BD ; erit componendo a AC ad CB , sicut CD ad BD . Sed ut a per 18
una antecedentium CD ad unam consequentium BD , ita sunt b quinti.
antecedentes AC & CD simul, id est, tota AD , ad consequen-
tes CB & BD simul, id est, ad totam CD . $Equalia$ igitur sunt c per 12.
quadratum CD & rectangulum ADB . $Quod$ erat faciendum. c per 17
sexti.

*Quoniam itaque Problemate ad æquationem perducto Algebra munus est eam deinde juxta certas regulas transmutare, servando semper æqualitatem, sic ut tandem constet, quo pacto illius ope quesita quantitas ex datis inveniri possit: non incon-
veniens duxi, si unà hic ostenderem, quibus modis aliquot il-
lius usitatiores transmutationes in proportionem resolvì queant,
cum hæc, ut supra monitum fuit, in Problematis Geometricæ re-
solvendis ac in Theorematis solito more demonstrandis, concin-
niores sint judicanda; præsertim ubi eadem æqualitas ad tres
pluresve dimensiones ascendit, atque idcirco illa cuique minus
obvia est, quâ ratione per Geometriæ Elementa sit explicanda.*

Typus aliquot æquationum, secundum Algebrae le-
ges reductarum, & earundem in proportionem cor-
respondentes resolutio; tam ad Problematum Re-
solutiones Geometricas ex calculo eliciendas,
quàm ad Theorematum Demonstrationes ex eo-
dem componendas, utilis.

Reductiones Algebraicæ

Si fuerit $a x \propto b c$:
dividatur utrinque per a
fit $x \propto \frac{b c}{a}$.

Si sit $a x g b x \propto c d$:
dividatur utrinque per $a g b$
fit $x \propto \frac{c d}{a g b}$.

Resolutiones Geometricæ.

erit d ut a ad b , ita c ad x . d per 16
vel permutatim $sexti.$
ut a ad c , ita b ad x .

erit e ut $a g b$ ad c , ita d ad x . e per 16
vel permutatim $sexti.$
ut $a g b$ ad d , ita c ad x .

Si

f per 16
sextri.

Si sit $ax \propto bcgdc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \propto \frac{bcgdc}{a}$.

erit f ut a ad bgd , ita c ad x .
vel permutatim
ut a ad c , ita bgd ad x .

g per 16
sextri.

Si sit $axg bx \propto cdged$:
dividatur utrinque per agb
fit $x \propto \frac{cdged}{agb}$.

erit g ut $agbadcge$, ita d ad x .
vel permutatim
ut $agbad$, ita cge ad x .

h per 16
sextri.

Si sit $ax \propto bb - cc$:
dividatur utrinque per a
fit $x \propto \frac{bb - cc}{a}$.

erit b ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x .
vel permutatim
ut a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x .

i per 16
sextri.* Ut supra ad
notam +k per 17
quinti.

Si sit $ax \propto bb + bx$: *
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto bb$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \propto \frac{bb}{a - b}$.

erit i ut a ad b , ita $b + x$ ad x .
& dividendo k
ut $a - b$ ad b , ita b ad x .

l per 16
sextri.
m per 18
quinti.

Si sit $ax \propto bb - bx$:
addatur utrinque bx
eritque $ax + bx \propto bb$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $x \propto \frac{bb}{a + b}$.

erit l ut a ad b , ita $b - x$ ad x .
& componendo m
ut $a + b$ ad b , ita b ad x .

n per 16
sextri.
o per 17
quinti.

Si sit $ax - ac \propto bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \propto bx + ac$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto ac$.
dividatur utrinque per $a - b$
fit $x \propto \frac{ac}{a - b}$.

erit n ut a ad b , ita x ad $x - c$.
& dividendo o
ut $a - b$ ad b , ita c ad $x - c$.
& per compositionem rationis
contrariam p
ut $a - b$ ad a , ita c ad x .

p vide Cla-
vium ad 18
quinti.q per 16
sextri.
r per 17
quinti.

Si sit $ax - ac \propto bx + bc$:
addito utrinque ac
erit $ax \propto bx + bc + ac$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto bc + ac$.

erit q ut a ad b , ita $x + c$ ad $x - c$. &
& dividendo r
ut $a - b$ ad b , ita $2c$ ad $x - c$.
Ubi liquet, etiam si 4^{us} hic ter-
minus proportionalis quantita-
tem

dividatur utrinque per $a-b$
fit $x \propto \frac{bc+ac}{a-b}$.

tem quæsitam x seorsim non exhibeat, ipsam tamen ex tribus prioribus, qui quidem omnes sunt cogniti, inveniri posse. Id quod similiter de præcedenti ac sequenti formula aliisque est intelligendum.

At verò si ipsa x quarto loco separatim desideretur, licebit ulterius sic argumentari.

α Haud secus, cum sit
ut a ad b , ita $x+c$ ad $x-c$,

erit invertendo a

a per Coroll.
4 quinti.

ut b ad a , ita $x-c$ ad $x+c$.

& per compositionem rationis contrariam b

b vide Clavium ad 13
quinti.

ut b ad $b+a$, ita $x-c$ ad $2x$.

Hinc cum $a-b-b \dots b+a$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c-x-c \dots 2x$

tres aliæ ab altera parte, quæ binæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est ordinata: erunt ipsæ quoque c ex æqualitate in eadem ratione, hoc est,

c per 22
quinti.

$a-b$ ad $b+a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x . d

d per 15
quinti.

Si fit $ac+ax \propto bc-bx$:
addito utrinque bx

erit $ac+ax+bx \propto bc$.

auferatur utrinque ac

eritque $ax+bx \propto bc-ac$.

dividatur utrinque per $a+b$

fit $x \propto \frac{bc-ac}{a+b}$.

erit e ut a ad b , ita $c-x$ ad $c+x$. α

c per 16
sexti.

& componendo f

ut $a+b$ ad b , ita $2c$ ad $c+x$.

f per 18
quinti.

Rursus cum sit

α ut a ad b , ita $c-x$ ad $c+x$,

erit invertendo g

g per Coroll.
4 quinti.

ut b ad a , ita $c+x$ ad $c-x$.

& per conversionem rationis h

h per Coroll.
19 quinti.

ut b ad $b-a$, ita $c+x$ ad $2x$.

Yy

Hinc

i per 22
quinti.

k per 15
quinti.

l per 16 sex-
si.

m per 17
quinti.

n per Coroll.
4 quinti.

o vide Cla-
vium ad 12
quinti.

p per 22
quinti.

q per 15
quinti.

r per 16 sex-
si.

s per 18
quinti.

t per Coroll.
4 quinti.

u per Coroll.
19 quinti.

Si sit $ax + ac \propto bx - bc$:
addito utrinque bc
erit $ax + ac + bc \propto bx$.
auferatur utrinque ax
eritque $ac + bc \propto bx - ax$.
dividatur utrinque per $b - a$
fit $\frac{ac + bc}{b - a} \propto x$.

Si sit $ac - ax \propto bx + bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \propto bx + ax + bc$.
auferatur utrinque bc
eritque $ac - bc \propto bx + ax$.
dividatur utrinque per $b + a$
fit $\frac{ac - bc}{b + a} \propto x$.

Hinc cum $a + b - b \dots b - a$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c - c + x \dots 2x$

tres alia ab altera parte, quæ bi-
næ in eadem sunt ratione, qua-
rumque proportio est ordinata:
erunt ipsæ quoque ex æqualita-
te in eadem ratione, hoc est,

$a + b$ ad $b - a$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x .

erit ^l ut b ad a , ita $x + c$ ad $x - c$.

& dividendo ^m

ut $b - a$ ad a , ita $2c$ ad $x - c$.

Rursus cum sit

a ut b ad a , ita $x + c$ ad $x - c$,

erit invertendo ⁿ

ut a ad b , ita $x - c$ ad $x + c$.

& per compositionem rationis
contrariam ^o

ut a ad $a + b$, ita $x - c$ ad $2x$.

Hinc cum $b - a - a \dots a + b$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c - x - c \dots 2x$,

tres alia ab altera parte, quæ bi-
næ in eadem sunt ratione, qua-
rumque proportio est ordinata:
erunt ipsæ quoque ex æqualita-
te in eadem ratione, hoc est,

$b - a$ ad $a + b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x .

erit ^r ut b ad a , ita $c - x$ ad $x + c$.

& componendo ^s

ut $b + a$ ad a , ita $2c$ ad $x + c$.

Rursus cum sit

a ut b ad a , ita $c - x$ ad $x + c$,

erit invertendo ^t

ut a ad b , ita $x + c$ ad $c - x$.

& per conversionem rationis ^u

ut a ad $a - b$, ita $x + c$ ad $2x$.

Hinc

DEMONSTRATIONIBUS. 355

Hinc cum $b + a = a \dots a = b$
sint 3 magnitudines ab una parte,

& $2c = x + c \dots 2x$
tres alia ab altera parte, quæ bi-
næ in eadem sunt ratione, qua-
rumque proportio est ordinata:
erunt ipsæ quoque ex æquali-
tate in eadem ratione, hoc est,

a per 22
quinti.

$b + a$ ad $a - b$, sicut $2c$ ad $2x$ seu c ad x . b per 15
quinti.

Si sit $ax - ac \propto bc - bx$:
addito utrinque ac
erit $ax \propto bc + ac - bx$.
addatur utrinque bx
eritq; $ax + bx \propto bc + ac$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $x \propto c$.

erit c ut a ad b , ita $c - x$ ad $x - c$.
Unde concluditur c esse $\propto x$. c per 16
sexti.

Nam minor esse non potest,
quoniam componendo ^d foret, d per 13
ut $a + b$ ad b , ita 0 ad $x - c$. quod
est absurdum. Similiter major
esse nequit, quandoquidem per
compositionem rationis contra-
riam ^e foret ut a ad $a + b$, ita
 $c - x$ ad 0 . quod perinde absur-
dum est. Nec aliter se res habet
in sequenti formula. e unde Cla-
ssicum ad 18
quinta.

Si sit $ac - ax \propto bx - bc$:
addito utrinque ax
erit $ac \propto ax + bx - bc$.
addatur utrinque bc
eritq; $ac + bc \propto ax + bx$.
dividatur utrinque per $a + b$
fit $c \propto x$.

erit f ut a ad b , ita $x - c$ ad $c - x$. f per 16
sexti.

Unde rursus ut ante concluditur
 c esse $\propto x$: cum nec major nec
minor esse possit.

*Cum igitur in resolvendo Problemate appareat, supponendo
illud ipsum ut jam factum, quo pacto quis argumentari possit,
ut id quod in eo queritur ex datis inveniat: ritè me facturum
judicavi, si ulterius hic ostenderem, quâ ratione præcedentium
reductionum vestigiis insistendo per illa eadem retrogradi li-
ceat, ad æquationes propositas, quas ipsius Problematitis conditio-
nes adimplere suppono, Geometricè componendas.*

Y y 2

Ty-

Typus vestigiorum, juxta quæ æquationes superius reductæ ac resolutæ rursus componuntur, initium faciendo à fine reductionis & per eadem vestigia regrediendo; ad Compositiones Geometricas ex calculo eruendas utilis.

*Compositiones Algebraica**Compositiones Geometrica*

a per 16
sexti.

fit $ax \propto bc$.

erit $a \propto ax \propto bc$.

multiplicetur utrinque per a

facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si fuerit $x \propto \frac{bc}{a}$: h. e., si sit ut a ad b , ita c ad x ; vel permutatim a ad c , ita b ad x :

b per 16
sexti.

fit $ax \propto b \propto cd$.

erit $b \propto ax \propto b \propto cd$.

multiplicetur utrinque per $a \propto b$

facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \propto \frac{cd}{ab}$: h. e., si sit ut $a \propto b$ ad c , ita d ad x ; vel permutatim $a \propto b$ ad d , ita c ad x :

c per 16
sexti.

fit $ax \propto bc \propto d \propto e$.

erit $c \propto ax \propto bc \propto d \propto e$.

multiplicetur utrinque per a

facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \propto \frac{bcd}{a}$: h. e., si sit ut a ad $b \propto d$, ita c ad x ; vel permutatim a ad c , ita $b \propto d$ ad x :

d per 16
sexti.

fit $ax \propto b \propto cd \propto e \propto d$.

erit $d \propto ax \propto b \propto cd \propto e \propto d$.

multiplicetur per $a \propto b$

facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \propto \frac{cd \propto e \propto d}{ab}$: h. e., si sit ut $a \propto b$ ad $c \propto e$, ita d ad x ; vel permutatim $a \propto b$ ad d , ita $c \propto e$ ad x :

e per 16
sexti.

fit $ax \propto bb - cc$.

erit $c \propto ax \propto bb - cc$.

multiplicetur utrinque per a

facto rectangulo tum sub extremis tum sub mediis

Si sit $x \propto \frac{bb - cc}{a}$: h. e., si sit ut a ad $b + c$, ita $b - c$ ad x ; vel permutatim a ad $b - c$, ita $b + c$ ad x :

fit

- fit $ax \propto bb + bx$.
addatur utrinque bx
eritque $ax - bx \propto bb$.
multiplicetur utrinque per $a - b$
Si sit $x \propto \frac{bb}{a - b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad b , ita b ad x : \mp
- fit $ax \propto bb - bx$.
auferatur utrinque bx
eritque $ax + bx \propto bb$.
multiplicetur utrinque per $a + b$
Si sit $x \propto \frac{bb}{a + b}$: hoc est, si sit ut $a + b$ ad b , ita b ad x :
- fit $ax - ac \propto bx$.
auferatur utrinque ac
eritque $ax \propto bx + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \propto ac$.
multiplicato utrinque per $a - b$
Si sit $x \propto \frac{ac}{a - b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad a , ita c ad x :
- erit $ax - ac \propto bx + bc$.
auferatur utrinque ac .
eritque $ax \propto bx + bc + ac$.
addatur utrinque bx
erit $ax - bx \propto bc + ac$.
- erit $ax - ac \propto bx + bc$.
id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem
ut a ad b , ita $x + c$ ad $x - c$.
& componendo
ut $a - b$ ad b , ita c ad $x - c$.
erit per divisionem rationis
contrariam m
Si sit $x \propto \frac{ac}{a - b}$: hoc est, si sit ut $a - b$ ad a , ita c ad x :
- erit $ax - ac \propto bx + bc$.
id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem,
ut a ad b , ita $x + c$ ad $x - c$.
& componendo
ut $a - b$ ad b , ita $2c$ ad $x - c$.
vel, sumptis consequentium se-
missibus, p
ut $a - b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2x - 2c$.
id est, per divisionem rationis
contrariam, q
Y y 3

f per 16
sexti.g per 18
quinti.
Ut supra ad
notam \mp h per 16
sexti.i per 17
quinti.k per 16
sexti.l per 18
quinti.m vide Cla-
vium ad
17 quinti.n per 16
sexti.o per 18
quinti.p vide Cla-
vium ad
22 quinti.
q vide Cla-
vium ad 17
quinti.

mul-

r per 15
quinti.

multiplicato utring; per $a-b$ ut $a-b$ ad $b+a$, ita $2c$ ad $2x$.
erit etiam r

Si sit $x \propto \frac{bc+ac}{a-b}$: hoc est, si sit ut $a-b$ ad $b+a$, ita c ad x :

s per 16
sexti.

erit s $ac+ax \propto bc-bx$.
id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem,

ut a ad b , ita $c-x$ ad $c+x$.

& dividendo s

ut $a+b$ ad b , ita $2c$ ad $c+x$.
vel, sumptis consequentium se-

missibus, u

ut $a+b$ ad $2b$, ita $2c$ ad $2c+2x$.

id est, per compositionem ratio-
nis contrariam, x

ut $a+b$ ad $b-a$, ita $2c$ ad $2x$.

erit etiam y

u vide Cla-
vium ad 22
quinti.

fit $ac+ax \propto bc-bx$.

auferatur utrinque bx

eritque $ac+ax+bx \propto bc$.

addatur utrinque ac

erit $ax+bx \propto bc-ac$.

x vide Cla-
vium ad 18
quinti.
y per 15
quinti.

multiplicato utring; per $a+b$

Si sit $x \propto \frac{bc-ac}{a+b}$: hoc est, si sit ut $a+b$ ad $b-a$, ita c ad x :

z per 16
sexti.

erit z $ax+ac \propto bx-bc$.

id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem,

ut b ad a , ita $x+c$ ad $x-c$.

& componendo a

ut $b-a$ ad a , ita $2c$ ad $x-c$.

vel, sumptis consequentium se-
missibus, b

ut $b-a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x-2c$.

id est, per divisionem rationis
contrariam, c

ut $b-a$ ad $a+b$, ita $2c$ ad $2x$.

erit etiam a

b vide Cla-
vium ad 22
quinti.

fit $ax+ac \propto bx-bc$.

auferatur utrinque bc

eritque $ax+ac+bc \propto bx$.

addatur utrinque ax

erit $ac+bc \propto bx-ax$.

c vide Cla-
vium ad 17
quinti.
d per 15
quinti.

multiplicato utring; per $b-a$

Si sit $\frac{ac+bc}{b-a} \propto x$: hoc est, si sit ut $b-a$ ad $a+b$, ita c ad x :

fit

erit $a c - a x \propto b x + b c$. c per 16
sexii.

id est, reducendo proportionem
ad æqualitatem,

ut b ad a , ita $c - x$ ad $x + c$.

& dividendo f

ut $b + a$ ad a , ita $2c$ ad $x + c$. f per 17
quinti.

vel, sumptis consequentium se-
missibus, g

ut $b + a$ ad $2a$, ita $2c$ ad $2x + 2c$. g vide Cla-
vium ad 22
quinti.

id est, per compositionem ratio-
nis contrariam, h

ut $b + a$ ad $a - b$, ita $2c$ ad $2x$. h vide Cla-
vium ad 18
quinti.

erit etiam i

i per 15
quinti.

fit $a c - a x \propto b x + b c$.

auferatur utrinque $a x$

eritque $a c \propto b x + a x + b c$.

addatur utrinque $b c$

erit $a c - b c \propto b x + a x$.

multiplicato utrinque per $b + a$

Si sit $\frac{a c - b c}{b + a} \propto x$: hoc est, si sit ut $b + a$ ad $a - b$, ita c ad x :

fit $a x - a c \propto b c - b x$.

auferatur utrinque $a c$

eritque $a x \propto b c + a c - b x$.

auferatur utrinque $b x$

erit $a x + b x \propto b c + a c$.

multiplicato utrinque per $a + b$

Si sit $x \propto c$: seu, quod idem est, si x sit ad c , sicut $a + b$ ad $a + b$:

fit $a c - a x \propto b x - b c$.

auferatur utrinque $a x$

eritque $a c \propto a x + b x - b c$.

auferatur utrinque $b c$

erit $a c + b c \propto a x + b x$.

multiplicato utrinque per $a + b$

Si sit $c \propto x$: seu, quod idem est, si c sit ad x , sicut $a + b$ ad $a + b$:

Cum in duabus præcedentibus formulis non occurrat quâ
viâ per proportionales, ut ante, ad æquationes priores perve-
niatur: licebit per æqualitatem procedere, æqualia per æqua-
lia multiplicando, ac deinde ab æqualibus æqualia auferendo,
omnino ut in Compositionibus hisce Algebraicis factum est.

PRO-

P R O B L E M A.

Datam rectam AB, utcumque sectam in C, rursus secare in D; ita ut rectangulum sub AD, DC comprehensum sit æquale quadrato ex DB.

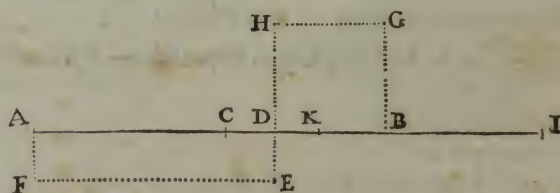
Series *Analyses* five *Resolutionis*.

Supposito Problemate ut jam factò,

voco AC. a

CB. b

& CD. x ; eritque AD $\propto a + x$, & DB $\propto b - x$.



Deinde ut habeatur æquatio,

Multiplico AD. $a + x$

per DC seu DE. x

Et fit rectangulum ADEF. $ax + xx$.

Similiter multiplico DB. $b - x$

per DB seu BG. $b - x$

$$\begin{array}{r} - bx + xx \\ bb - bx \end{array}$$

Et fit quadratum DBGH. $bb - 2bx + xx$.

Unde talis exurgit æquatio

$$ax + xx \propto bb - 2bx + xx.$$

Ad quam reducendam tollatur utrinque xx ,

$$\text{eritque } ax \propto bb - 2bx.$$

Deinde transferatur $2bx$ ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur, & cognitæ ab altera parte,

$$\text{\& fit } ax + 2bx \propto bb.$$

Cujus

Cujus utraque pars si dividatur per $a+2b$,
invenietur $x \propto \frac{bb}{a+2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate
in proportionem, erit ut $a+2b$ ad b , ita b ad x .

Id quod docet, ad secandam AB in D, qualis requiritur, produ-
cendam esse AB ad I, ita ut BI sit æqualis BC; ac deinde ad
AI & IB vel BC inveniendam esse 3^{iam} proportionalem,
hoc est, ut AI sit ad IB vel BC, sicut BC ad CD.

Ut autem pateat demonstratio, repetantur Analyseos vestigia.
Si enim per hæc ipsa regrediamur, incipiendo ab ejus fine & defi-
nendo ubi illa initium sumpsit, inventa simul erit via à dato seu
concesso perveniendi ad quæsitum. In quem igitur finem binas
sequentes compositiones, quarum altera Algebrae, altera Geo-
metriae genuina est, ob oculos ponere visum fuit, adhibita utrius-
que calculi interpretatione sive ad figuram relatione.

Compositio Algebraica.

Compositio Geometrica.

Finis Compositionis.

<p>□ AD, CD vel ADEF & fit $ax+xx \propto$ □ DB vel DBGH. $bb-2bx+xx.$ □ CD vel DK Addatur utrinque xx, □ AC, CD eritque $ax \propto$ (□DB--□CD vel DK) i. e. d. $bb-2bx.$ □ CBK □ CI, CD vel □ CDI+□ CD Auferatur utrinque $2bx$, □ AI, CD □ IB vel BC erit $s ax+2bx \propto bb.$</p>	<p>□ AD, CD vel ADEF Et fit, per 3. 2^{di}, $ax+xx \propto$ □ DB vel DBGH. $bb-2bx+xx.$ per 6. 2^{di}. □ CD vel DK Addatur utrinque xx □ ACD □ CBK erit, per 16. 6^{ti}, $ax \propto bb-2bx.$ Id est, resolutâ proportionem ad æqualitatem, AC CB BK KD vel CD ut a ad b, ita $b-2x$ ad $x.$ Et, sumptis consequentium se- missibus, vide Clarium ad 22. 5^{ti}. AC CI BK KC ut a ad $2b$, ita $b-2x$ ad $2x.$ Unde dividendo erit, per 17 quinti. AI IC BC 2CD vel CK ut $a+2b$ ad $2b$, ita b ad $2x.$ Zz</p>	<p>a per 3 se- cundi. b per 6 se- cundi. c per 5 se- cundi. d per 1 se- cundi. e per 3 se- cundi. f per 17 sexti.</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

id est, reductâ proportionem sive, sumptis consequentium duplis, *vide Clavium ad 22. 5^{ti}.*
ad æqualitatem,

AI IB BC CD

Ex constructione est, ut $a + 2b$ ad b , ita b ad x .

. Principium Compositionis.

Adaptâ itaque tum ad Constructionem tum ad Demonstrationem viâ, licebit Problema construere atque dupliciter demonstrare, ut sequitur.

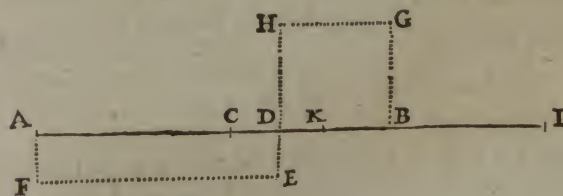
Constructio.

Productâ AB ad I, donec BI sit æqualis BC, fiat ut AI ad IB vel BC, ita BC ad CD: dico rectangulum ADC seu ADEF quadrato DB seu DBGH æquale esse.

Demonstratio.

Cum enim ex constructione AI sit ad IB vel BC, ut BC ad CD: erit s rectangulum sub extremis AI, CD, id est, b rectangulum sub AC, CD unâ cum rectangulo sub CI, CD, æquale quadrato mediæ IB vel BC. A quibus si commune aufe-

g per 17
sexti.
h per 1 se-
cundi.



i per 3 se-
cundi.
k per 5 se-
cundi.

ratur rectangulum sub CI, CD: erit reliquum rectangulum sub AC, CD æquale BC quadrato, dempto eidem rectangulo sub CI, CD, id est, i rectangulo CDI unâ cum quadrato CD. At cum dempto CDI rectangulo à quadrato CB vel BI k relinquatur quadratum DE: patet dictum rectangulum ACD quadrato DB æquale esse minus quadrato CD. Hinc cum, sumendo

DEMONSTRATIONIBUS. 363

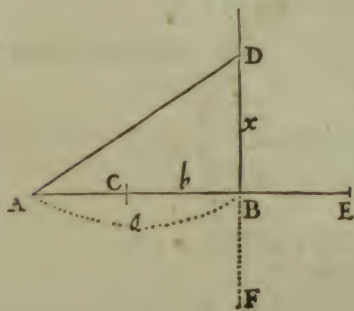
miendo CD & DK æquales, quadratum DB minus quadrato CD vel DK æquale sit rectangulo CBK: manifestum est, si æqualibus hisce rectangulis ACD & CBK addatur commune quadratum CD vel DK, etiam totum toti æquale esse, id est, rectangulum ADC seu ADEF ipsi DB quadrato seu DBGH. Quod erat faciendum.

Vel sic:

Cum ex constructione sit ut AI ad IB, ita BC ad CD: erit quoque, sumptis consequentium duplis, ut AI ad IC, ita BC ad 2 CD seu CK; & dividendo ut AC ad CI, ita BK ad KC; id est, sumptis consequentium semissibus, ut AC ad CB, ita BK ad KD vel CD. Æquale igitur est rectangulum sub extremis A, C, CD rectangulo sub mediis C, B, B, K. Quibus si addatur commune quadratum CD vel DK, erit & totum toti æquale, id est, rectangulum ADC seu ADEF ipsi quadrato DB seu DBGH. Quod erat faciendum.

PROBLEMA.

Datâ rectâ AB utcumque sectâ in C, erectâque ex ejus termino B super ipsâ perpendiculari indefinitâ BD: ex altero ejus termino A rectam lineam ducere AD, huic occurrentem in D; ita ut ipsa æqualis sit rectis DB, BC simul sumptis.



Series Analyseos.

Ponatur factum quod quæritur,

sitque $AB \propto a$

$CB \propto b$

& $BD \propto x$: eritque

$AD \propto b + x$.

Hinc cum angulus ad B sit rectus, erit quadratum ex AD æquale binis quadratis ex AB & BD.

Zz 2

Unde

Unde talis resultat æquatio

$$\square AD \quad \square AB + \square BD$$

$$bb + 2bx + xx \propto aa + xx.$$

Ad quam reducendam, tollatur utrinque xx ,

$$\text{eritque } bb + 2bx \propto aa.$$

Deinde transferatur bb ad alteram partem, ut incognita quantitas ab una parte habeatur & reliquæ ab altera parte,

$$\& \text{ fit } 2bx \propto aa - bb.$$

Cujus utraque pars si dividatur per $2b$,

obtinebitur $x \propto \frac{aa - bb}{2b}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $2b$ ad $a + b$, ita $a - b$ ad x .

Quod ipsum docet, ad Problema hoc solvendum, prout BE in directum ipsius AB sumpta est æqualis BC, opus tantum esse, ad CE, AE, & AC invenire 4^{am} proportionalem BD.

Ad inveniendam autem demonstrationem, fiat repetitio vestigiorum Analyseos, incipiendo ab ejus fine & per eadem vestigia progrediendo usque ad ipsius initium; ita videlicet, ut quod in Analyfi seu Resolutione addendum præcipitur, id in Synthesi seu Compositione subtrahatur, & contra: cum Analyfis & Synthesis directè omnino sibi invicem opponantur.

Finis Compositionis.

Unde & ipsæ rectæ FD & AD.

Æqualia igitur sunt $\square FD$ & $\square AD$.

$$\square FB + 2\square FBD + \square BD, \text{ vel } \square FD^b. \quad \square AB + \square BD, \text{ vel } \square AD^c.$$

b per 47
primi.
c per 4^{se-}
cundi.

$$\text{Et fit } bb + 2bx + xx \propto aa + xx.$$

$$\square BD$$

Rurfus addatur utrinque xx ,

$$\square FB + 2\square FBD \quad \square AB^d.$$

d per 6^{se-}
cundi.

$$\text{eritque } bb + 2bx \propto aa.$$

$$\square FB \text{ vel } BC$$

Addatur utrinque bb ,

$$\square CE, BD \text{ seu } 2\square FBD \quad \square EAC.$$

e per 16
sexii.

$$\text{erit } e \ 2bx \propto aa - bb.$$

id est,

DEMONSTRATIONIBUS. 365

id est, reductâ proportionem ad æqualitatem, sumptâque FB
æquali BC,

CE AE AC BD

Ex constructione est ut $2b$ ad $a+b$, ita $a-b$ ad x .

Principium Compositionis.

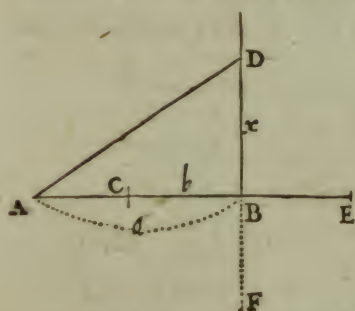
Inventâ igitur tum Constructione tum Compositione sive Demonstratione, poterit Problema, neglecto jam artificio, quo utraque fuit investigata, in hunc modum construi atque componi.

Constructio.

Productâ AB ad E, ut BE sit æqualis BC: fiat ut CE ad AE, ita AC ad BD, jungaturque AD. Dico hanc ipsis DB, BC simul sumptis æqualem esse.

Demonstratio.

Etenim productâ DB ad F, ita ut BF sit æqualis BC, quoniam per constructionem



CE est ad AE, sicut AC ad BD: erit \therefore rectangulum sub extremis CE, BD, id est, duplum rectangulum FBD, æquale rectangulo sub mediis EA, AC. Quibus si addatur commune quadratum ex FB vel BC, erit etiam quadratum FB unâ cum duplo rectangulo FBD

f per 16
sexi.

æquale quadrato ex AB z . Quibus si rursus addatur commune quadratum ex BD: erunt quoque bina quadrata ex FB, BD simul cum duplo rectangulo FBD, id est h , quadratum totius FD, æqualia binis quadratis ex AB, BD, id est z , æquale quadrato ex AD. Unde & ipsæ rectæ FD & AD æquales erunt. Hinc cum FD æqualis sit ipsis DB, BC simul sumptis, erit etiam AD ipsis DB, BC simul sumptis æqualis. Quod erat faciendum.

g per 6
secundi.

h per 4
secundi.

i per 47
primi.

Zz 3

THEO-

DEMONSTRATIONIBUS. 367

Demonstrationis series eodem modo se habet quo Analyseos, cum utriusque vestigia consentiant, quibus ab hypothese ad quæ-
siti conclusionem perducimur. Uti hic videre est.

Etenim cum ^e sit
ut FG ad BF, ita AG ad AB:

c per 3, sexti.

$$y-x-x-x-z / a$$

erit quoque ^d

d per 16
sexti.

$$\text{ut } \square FG \text{ ad } \square BF, \text{ ita } \square AG \text{ seu } \square AB + \square BG \text{ ad } \square AB$$

$$yy-2xy+xx-x-x-zz, \text{ id est, } aa+yy / aa.$$

& dividendo ^e

e per 17
quinti.

$$\text{ut } \square FG - \square BF \text{ vel } FH,$$

$$\text{id est, } \square BGH^f \text{ ad } \square BF, \text{ ita } \square BG \text{ ad } \square AB$$

f per 6 se-
cundi.

$$yy-2xy-x-x-yy / aa.$$

permutandoque ^g

g per 16
quinti.
h per 1 sexti.

$$\text{ut } \square BGH \text{ ad } \square BG, \text{ vel }^b \text{ ut } HG \text{ ad } GB, \text{ ita } \square BF \text{ ad } \square AB$$

$$y-2x-y-x-x / aa.$$

Id est, invertendo & per conversionem rationis ⁱ,

i per Cor. 4
quinti, &
per Cor. 19
quinti.

$$\text{ut } \square AB \text{ ad } \square AB - \square BF, \text{ ita } GB \text{ ad } BH$$

$$aa-xx-x-x-y / 2x.$$

& duplatis antecedentibus ^k & convertendoque

k vide Cla-
vum ad 22
quinti.
l per 15
quinti.

$$\text{ut } \square AB - \square BF \text{ ad } 2 \square AB, \text{ ita } BH \text{ ad } 2 GB \text{ seu } BF \text{ ad } BG$$

$$aa-xx-2aa-x / y.$$

Quod erat ostendendum.

Quod si autem Algebrae ignaris sive in inveniendi arte impe-
ritis ipsa demonstratio sit exhibenda, poterit ea prætermittis jam
hisce vestigiis sic adhiberi.

Sumatur FH æqualis FB. Cum igitur in triangulo ABG an-
gulus ad A recta AF bifariam sectus sit, erit ^m ut FG ad BF, ita ^m per 3
AG ad AB. Sed cum linearum proportionalium etiam propor-
tionalia sint quadrata, erit & ⁿ ut quadratum FG ad quadratum ⁿ per 22
BF, ita quadratum AG, id est, ^{per 47 primi}, summa quadrato-
rum AB, BG, ad quadratum AB. Et dividendo ^o ut quadratum ^o per 17
FG minus quadrato BF vel FH, id est ^p rectangulum BGH, ^p per 6 se-
ad quadratum BF, ita quadratum BG ad quadratum AB; per-
mutandoque ^q ut rectangulum BGH ad quadratum BG seu ^r ut ^q per 16
HG ad GB, ita quadratum BF ad quadratum AB. Hoc est, ^r per 1 sexti.
in-

s per Coroll.
4 quinti, &
per Cor. 19
quinti.
t vide Cla-
vium ad 22
quinti.
u per 15
quinti.

invertendo & per conversionem rationis ¹, ut quadratum AB ad quadratum AB minus quadrato BF, ita GB ad BH; & duplatis antecedentibus ² convertendoque, ut quadratum AB minus quadrato BF ad duplum quadrati AB, ita BH ad duplum ipsius GB seu ³ BF ad BG. Quod erat demonstrandum.

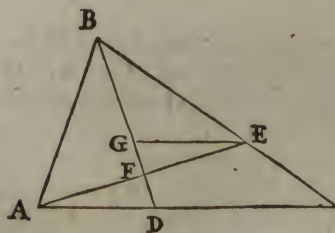
Hinc

„ Si, *Tangens cujuslibet arcus minoris quam 45 gr. ducatur*
„ *in duplum Quadratum Radii; à Quadrato Radii auferatur*
„ *Tangentis quadratum; Illud productum dividatur per hoc re-*
„ *siduum: Quotus erit Tangens arcus dupli.*

Theorema hoc à Clarissimo viro D. Joanne Pellio excogitatum atque ingeniosè adhibitum pluribus modis demonstratum reperitur in tractatu ejus de controversiis, circa veram circuli mensuram, inter ipsum & Clar. virum D. Christianum Severini Longomontanum ortis, ac anno 1647 in lucem editis.

THEOREMA.

Si fuerit triangulum ABC, cujus angulus ad B rectâ BD bifariam sit divisus, & ex BC abscindatur BE æqualis AB, jungaturque AE, secans BD in F: dico, si agatur EG parallela AC, occurrens ipsi BD in G, esse ut BG ad BD, ita AD ad DC, & AB ad BC; nec non DC bis esse ad excessum, quo DC superat AD, sicut BD ad DF.



Series *Analyscos.*

Esto $BD \propto b$

$AD \propto c$

$DC \propto y$

& $DF \propto z$.

Quoniam itaque triangulorum ABF, EBF anguli ad B ex hypothese sunt æquales, nec non latera AB, BF & EB, BF, quæ ipsos comprehendunt, æqualia: erunt & ⁴ anguli ad F æquales, id est recti, - basif-

a per 4 pri-
mi.

DEMONSTRATIONIBUS. 369

basisque AF basi FE æqualis. Porro cum ^b propter parallelas AC, GE anguli DAF, FEG in triangulis AFD, FGE æquales sint, ut & ^c anguli ad verticem AFD & GFE, latusque AF lateri FE, ut ostensum est: erunt quoque ^d reliqua latera AD, DF reliquis lateribus EG, GF æqualia. Hinc cum ^e propter similitudinem triangulorum BGE, BDC, BG sit ad GE, id est, AD, sicut BD ad DC; nec non BG ad BE, id est AB sicut BD ad BC: erit quoque ^f permutando BG ad BD, sicut AD ad DC, & AB ad BC. Quod est primum.

Cæterum DC bis esse ad excessum, quo DC superat AD, sicut BD ad DF: ita patet.

Est enim, ut BG ad BD, ita AD ad DC

$$b-2\zeta \text{ --- } b \text{ --- } c / y.$$

Ideoque \square BG, DC \propto \square BD, AD.

$$by-2y\zeta \propto bc.$$

$$\text{add. utrinque } 2y\zeta \quad \frac{by \propto 2y\zeta + bc}{by - bc \propto 2y\zeta}$$

$$\text{toll. utrinque } bc \quad \frac{by - bc \propto 2y\zeta}{\text{fit } \frac{by-bc}{2y} \propto \zeta. \text{ Hoc est, erit ut}}$$

$$\text{div. utrinque per } 2y \quad \frac{\text{fit } \frac{by-bc}{2y} \propto \zeta. \text{ Hoc est, erit ut}}$$

$$2DC \text{ --- } DC \text{ --- } AD \text{ --- } BD \text{ --- } DF$$

$$2y \text{ ad } y-c, \text{ ita } b \text{ ad } \zeta. \text{ Quod est secundum.}$$

Vel etiam, hoc modo:

Etenim cum sit

ut BG ad BD, ita AD ad DC

$$b-2\zeta \text{ --- } b \text{ --- } c / y.$$

erit invertendo ^b

ut DC ad AD, ita BD ad BG

$$y \text{ --- } c \text{ --- } b / b-2\zeta.$$

& per conversionem rationis ⁱ

ut DC ad DC-AD, ita BD ad DG

$$y \text{ --- } y-c \text{ --- } b / 2\zeta.$$

id est, duplatis antecedentibus, ^k

ut $2DC$ ad $DC-AD$, ita $2BD$ ad DG seu BD ad DF

$$2y \text{ --- } y-c \text{ --- } b / \zeta.$$

A a a

Ex

b per 29
primi.

c per 15
primi.

d per 26
primi.

e per Cor. 4.
quinti.

f per 16
quinti.

g per 16
secundi.

h per Cor. 4.
quinti.

i per Cor. 19.
quinti.

k vide Cla-
ssicum ad 22
quinti.

Ex his facile est, cognitis AD, DB, & DC, invenire DF.

Si enim, exempli gratia, AD sit 39, DB 45, & DC 325:
fiat ut 2 DC 650 ad DC—AD 286, ita DB 45, ad DF 19 $\frac{1}{2}$.

THEOREMA.

Iisdem positis, dico rectangulum ADC unà cum
quadrato DB æquale esse rectangulo ABC.

Series *Analyseos*.

Esto AB $\propto a$

BD $\propto b$

AD $\propto c$

BC $\propto x$

DC $\propto y$

& DF $\propto z$.

a per 13 se-
cundi.

Etenim cum $a^2 \square BDF$ sit $\propto \square AD + \square DB - \square AB$,

id est, $2bz \propto cc + bb - aa$:

erit, dividendo utrinque per $2b$, $z \propto \frac{cc + bb - aa}{2b}$.

Unde cum per antec. Theorema inventum quoque sit $\frac{by - bc}{xy} \propto z$:

erit $\frac{cc + bb - aa}{b} \propto \frac{by - bc}{y}$.

diviso utroque denomina-
tore per 2 , instituat
multiplicatio per crucem

add. utrinque axy

toll. utrinque bby

add. utrinque bbc

loco ay substit. cx

div. utrinque per c

$ccy + bby - aay \propto bby - bbc$

$ccy + bby \propto aay + bby - bbc$

$ccy \propto aay - bbc$

$ccy + bbc \propto aay$

$ccy + bbc \propto acx$

$\square ADC + \square DB \square ABC$

Et fit $cy + bb \propto ax$. Quod erat propositum.

Quo autem pacto in adæquatione hac resolvenda argumen-
tandum sit, ut sequendo vestigia allatæ reductionis, quæ ob su-
periores multiplicationem per crucem propriè Algebraica est, quæ-

Ex demonstratis in antec.

Theoremate vel 3^{ia} Sexti est

ut AD ad DC, ita AB ad BC

$c - y - a / x$.

ac proinde per 16^{sexti}

$\square AD, BC \propto \square AB, DC$

$cx \propto ay$.

quæsitum Theorematis Geometricè concludatur, sequens terminorum dispositio docebit.

Ex præcedenti Theoremate est

ut $2DC$ ad $DC-AD$, ita BD ad DF

$$2y \text{ --- } y - c \text{ --- } b \text{ / } \zeta$$

ac proinde $2 \square CDF$ æqual. $\square BDC - \square ADB$

$$\alpha \quad 2y\zeta \quad \infty \quad by - bc. \quad \text{b per 16 sexti.}$$

Deinde c est, ut BD ad DC , ita $2 \square BDF$ ad $2 \square CDF$. af-

$$b \text{ --- } y \text{ --- } 2b\zeta \text{ / } 2y\zeta \quad \text{oper 1 sexti.}$$

sumptâ sc. com. alt. $2DF$, id est, 2ζ . d per 13 secundæ.

Hinc cum d

$2 \square BDF$ æqu. $\square AD + \square DB - \square AB$, & $2 \square CDF$ æqu. $\square BDC - \square ADB$:

$$2b\zeta \quad \infty \quad cc + bb - aa, \quad \& \quad 2y\zeta \quad \infty \quad by - bc:$$

erit ut BD ad DC , seu c $\square BD$ ad $\square BDC$,

$$bb \text{ --- } by \quad \text{e assumptâ com. altit. BD, id est, b.}$$

ita $\square AD + \square DB - \square AB$ ad $\square BDC - \square ADB$.

$$cc + bb - aa \text{ --- } by - bc$$

ideoque f

& reliq. $\square AB - \square AD$ ad rel. $\square ADB$, ut totum ad totum seu BD ad DC .

$$aa - cc \text{ --- } bc \text{ --- } b \text{ / } y. \quad \text{f per 19 quintæ.}$$

Facile hîc esset quæsitum Propositionis concludere, revocando hanc proportionem ad æqualitatem, & deinde in locum a y substituendo c x . Sed quoniam sic ad solida ascenditur, de quibus in posterioribus Elementorum libris agitur, qui ob difficultatem suam magis præteriri quàm pro Elementis Geometriæ addisci solent, poterimus iisdem sepositis in quæsitæ conclusionem sic ulterius argumentari.

Sed ut BD est ad DC , ita quoque est s $\square ADB$ ad $\square ADC$; g assumptâ comm. altit. AD seu c .

$$b \text{ --- } y \text{ --- } bc \text{ / } cy;$$

& ut BD ad AD , ita quoque est h $\square ADB$ ad $\square AD$; & i , h assumptâ comm. altit. AD seu c .

$$b \text{ --- } c \text{ --- } bc \text{ / } cc$$

$\square BD$ ad $\square ADB$ seu bb ad bc . i assumptâ comm. altit. BD seu b .

$$Aaa \quad 2$$

Erunt

Erunt itaque $\square AB$ -- $\square AD$, $\square ADB$, & $\square AD$ tres magnitudines

$aa - cc - bc \dots cc$ ab una parte;

& $\square BD$, $\square ADB$, & $\square ADC$ tres alia ab altera

$bb \dots bc - cy$ parte, quæ binæ sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata:

k per 23
quinti.

quare etiam k ex æqualitate proportionales erunt,

id est, $\square AB$ -- $\square AD$ ad $\square AD$, sicut $\square BD$ ad $\square ADC$.

$aa - cc - cc - bb / cy$.

l per 13
quinti.

Et componendo l.

$\square AB$ ad $\square AD$, sicut $\square BD + \square ADC$ ad $\square ADC$

$aa - cc - bb + cy / cy$.

m per 16
quinti.

Permutandoque m

$\square AB$ ad $\square BD + \square ADC$, sicut $\square AD$ ad $\square ADC$ seu

$aa - bb + cy - cc / cy$.

AD ad DC , id est, c ad y .

n per 1 sexti,

reliqta sc.

com. altit.

AD seu c .

o per antec.

Theorema

vel 3 sexti.

p assumptâ

com. altit.

AB seu a .

q per 9

quinti.

Sed ut AD ad DC , ita o est quoque AB ad BC , seu p, $\square AB$

$c - y - a / x$.

ad $\square ABC$, id est, aa ad ax .

Unde erit ut $\square AB$ ad $\square BD + \square ADC$, ita $\square AB$ ad $\square ABC$.

$aa - bb + cy - aa / ax$.

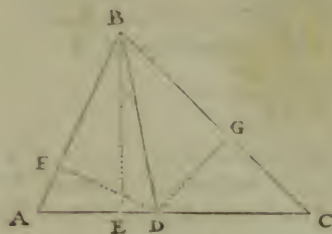
Æqualia igitur sunt q $\square BD + \square ADC$ & $\square ABC$.

$bb + cy \propto ax$. Quod erat ostendendum.

Idem quoque aliter à nobis demonstratum reperitur Propne 20^{ma} secundæ partis prioris tractatus Exercitationum nostrarum Mathematicarum; ac præterea etiam adhuc aliter ab aliis.

Alia

*Alia precedentis Theorematis Analysis, supponendo tantum
26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis.*



Demissis ex D super AB,
BC, perpendicularibus DF,
DG, patet, ob angulum ABC
recta BD bifariam divisum;
ipsas DF & DG, ut & FB &
BG per 16 primi esse æquales.
Deinde esto etiam BE per-
pendicularis ad AC, sitque

$$AB \propto a$$

$$BD \propto b$$

$$AD \propto c$$

$$BC \propto x$$

$$DC \propto y$$

$$FB \text{ vel } BG \propto t, \text{ eritque } AF \propto a - t,$$

$$\& GC \propto x - t.$$

$$\& ED \propto v, \text{ eritque } AE \propto c - v,$$

$$\& EC \propto y + v.$$

per 47 primi.

$$\text{Subtr. } \begin{cases} \square AD. cc \\ \square AF. aa - 2at + tt \end{cases} \quad \text{Subtr. } \begin{cases} bb. \square BD \\ tt. \square FB \end{cases}$$

$$\square FD. cc - aa + 2at - tt \propto bb - tt. \square FD$$

dele utrinque tt , &
transfer cc & aa

$$2 \square ABF \quad \square AB + \square BD - \square AD$$

$$2at \propto aa + bb - cc *$$

div. utrinque per 2a

$$\text{fit } t \propto \frac{aa + bb - cc}{2a}.$$

Sed t in aliis quoque terminis inveniri potest, quærendo eam
per 3 latera trianguli DBC, hoc pacto:

$$Aaa ;$$

Subtr.

per 47 primi.

$$\text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square D C . y y \\ \square G C . x x - 2 x t + t t \end{array} \right. \quad \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} b b . \square B D \\ t t . \square B G \end{array} \right.$$

$$\square D G . y y - x x + 2 x t - t t \propto b b - t t . \square D G$$

del. utrinque $t t$, & transf. $y y$ & $x x$

$$\begin{array}{r} 2 \square C B G \quad \square B C + \square B D - \square D C \\ 2 x t \propto x x + b b - y y * \end{array}$$

div. utrinque per $2 x$

$$\text{fit } t \propto \frac{x x + b b - y y}{2 x}.$$

Sive igitur quærat^r t per 3^a latera \triangle^{li} $A B D$, sive per 3^a latera \triangle^{li} $D B C$, elucet utique inde * Propositio 13 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa adhibenda sit ad $F B$ vel $B G$ inveniendam.

Erit itaque

$$\frac{a a + b b - c c}{a} \propto \frac{x x + b b - y y}{x}$$

diviso utroque denominatore per 2 , instituat^r multiplicatio per crucem transf. quantitates, ut, quæ in $b b$ ductæ sunt ab una parte habeantur

$$\frac{a a x + b b x - c c x \propto a x x + a b b - a y y}{b b x - a b b \propto a x x - a y y + c c x - a a x}$$

div. utrinque per $x - a$

$$\text{eritque } b b \propto \frac{a x x - a y y + c c x - a a x}{x - a}.$$

Quærat^r jam v per 3^a latera trianguli $A B D$

per 47 primi

$$\text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} \square A B . a a \\ \square A E . c c - 2 c v + v v \end{array} \right. \quad \text{Subtr. } \left\{ \begin{array}{l} b b . \square B D \\ v v . \square E D \end{array} \right.$$

$$\square E B . a a - c c + 2 c v - v v \propto b b - v v . \square E B$$

del. utrinque $v v$, & transf. $a a$ & $c c$

$$\begin{array}{r} 2 c v \propto b b + c c - a a \\ \text{fit } v \propto \frac{b b + c c - a a}{2 c} . \end{array}$$

div. utrinque per $2 c$

Sed v quoque in aliis terminis inveniri potest, quærendo eam per 3^a latera trianguli $D B C$, hoc pacto:

Subtr.

Subtr. $\left\{ \begin{array}{l} \square BD. bb \\ \square ED. vv \end{array} \right.$ ^{per 47 primi} Subtr. $\left\{ \begin{array}{l} xx. \square BC \\ yy+2yv+vv. \square EC \end{array} \right.$

$\square EB. bb-vv \propto xx-yy-2yv-vv. \square EB$

del. utrinque vv , & transf. bb & $2yv$

$2\square CDE \quad \square BC-\square DC-\square BD$

$2yv \propto xx-yy-bb \quad +$

div. utrinque per $2y$

fit $v \propto \frac{xx-yy-bb}{2y}$.

Quærendo itaque v per 3^a latera $\triangle^i DBC$, emanat hinc Prop. 12 secundi libri Euclidis, ac præterea quomodo hæc ipsa debeat adhiberi ut inveniatur ED .

Quare erit

$\frac{bb+cc-aa}{c} \propto \frac{xx-yy-bb}{y}$

diviso utroque denominatore per 2, infuturatur multiplicatio per crucem

transf. quantitates, ut, quæ in bb ductæ sunt, ab una parte habeantur

$bb+cc-aa \propto \frac{xx-yy-bb}{y}$

div. utrinque per $y+c$

& fit $bb \propto \frac{cxx+aa-yy-cc}{y+c}$.

Dupliciter igitur invento bb , habebitur æquatio

inter $\frac{cax-ay+ccx-aa}{x-a}$ & $\frac{cax+aa-yy-cc}{y+c}$.

mult. per crucem

$cax-ay+ccx-aa \propto \frac{cax+aa-yy-cc}{y+c}$

$cax+aa-yy-cc \propto \frac{cax-ay+ccx-aa}{x-a}$

transpositis transponendis, fit

$2acxx+cxy+c^3x-cx^3-aaex+2ccxy$

$2aax+ay^3+accy-axxy-a^3y+2acyy$

div. utrinque per $2ax+yy+cc-xx-aa+2cy$.

AD DC AB BC

eritque $cx \propto ay$. Hoc est, erit ut c ad y , ita a ad x .

ac proinde $x \propto \frac{ay}{c}$, & $\frac{cx}{a} \propto y$. Quæ tertia est Propositio libri sexti Euclidis.

Hinc

Hinc existente $bb \propto \frac{axx - ayy + ccx - aax}{x - a}$, si in locum ay

substituatur cx & vice versâ: habebitur $bb \propto \frac{axx - cxy + cay - aax}{x - a}$,
 $\square ADC + \square DB \square ABC$

id est, $bb \propto ax - cy$; seu, quod eodem recidit, $cy + bb \propto ax$.

Omnino ut in antecedenti Theoremate. Unde facile est, cognitis AB, BC, AD, & DC, invenire BD.

Quod si autem, existente $bb \propto ax - cy$, pro x scribatur $\frac{ay}{c}$, fiet $bb \propto \frac{aay}{c} - cy$ vel $bbc \propto aay - ccy$. id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bbc}{aa - cc} \propto y$. Vel, resolvendo æqua-

$$\square AB - \square AD \square BD \quad AD \quad DC$$

litatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad bb , ita c ad y . Simi-

liter, si pro y scribatur $\frac{cx}{a}$, erit $bb \propto ax - \frac{ccx}{a}$ vel $bba \propto aax - ccx$.

id est, dividendo utrinque per $aa - cc$, erit $\frac{bba}{aa - cc} \propto x$. Vel,

$$\square AB - \square AD$$

resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $aa - cc$ ad $\square BD$ AB BC

bb , ita a ad x . Quæ quidem insuper ostendunt, quo pacto ex tribus lateribus \triangle^i ABD inveniri possint BC & DC.

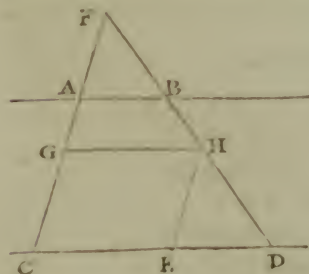
Atque ita constat, si ad præcedentis Theorematis investigationem duntaxat adhibeantur 26 & 47 Propositiones primi libri Euclidis, quâ ratione ex calculo non modo idem Theorema emanet, verum etiam Propositio 12 & 13 secundi libri, 3^{ia} sexti, aliæq; propositiones, in Euclide non extantes, quæ triangulum concernunt, cujus angulus bifariam est divisus.

Ceterum calculum hunc multò prolixiorē esse calculo antecedentis Theorematis nemini (ut opinor) mirum videri debet, cum ad illud indagandum supposuerimus Theorema, quod ei immediate præcedit, tum etiam Prop. 12 aut 13 secundi: siquidem rationes, quæ in iis comprobandis cunctæ ac singule sunt perpendendæ, illis sic jam præsuppositis omnino prætermittuntur; quæ alioquin, si rem ipsam penitus inspicere atque à primis

primis velut principiis, (quemadmodum in Algebra praesertim fieri solet,) deducere velimus, longâ serie forent spectanda. Quae quidem hic refero, ut quilibet intelligat, nonnullos reperiri, etiam in Mathematicis haud leviter versatos, qui videntes huiusmodi calculum saepenumero valde prolixum evadere, plurimisque terminis constantem, demonstrationes Geometricas ei longè praefertunt, non animadvertentes ejusdem beneficio elici Theoremata, quibus ad id concatenatim utuntur. Existimantes praeterea Algebram vel hoc nomine non magni faciendam esse, quod solummodo circa aequationes versetur ac easdem continue respiciat, quod sanè ego maximi momenti judicaverim; quippe harum ope infinita genera Problematum pro uno genere Problematum haberi queunt, ac demum quicquid in universa Mathesi arduum seu difficile occurrit, id omne per aequationem absque ulla ambage & verborum involucri quàm simplicissime potest explicari.

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis lineis parallelis AB, CD, & in iis duobus punctis A & E: è puncto F extra ipsas dato rectam lineam ducere FBD, quæ à positione datis abscindat rectas AB, ED, datam inter se rationem habentes AF ad CG, seu a ad d .



Series Resolutionis.

Ponatur factum, quod quaeritur, hoc est, sit AB ad ED, ut a ad d , sitque AF $\propto a$
 $CF \propto b$
 $CE \propto c$
 & AB $\propto x$.

Bbb

Hinc

Hinc ut AF ad CG, ita AB ad 4^{tam} seu ED

$$a \text{ --- } d \text{ --- } x \quad / \quad \frac{dx}{a}$$

Sed ex similitudine \triangle lorum AFB & CFD est quoque

$$\text{ut AF ad AB, ita CF} \quad \frac{\text{add. CE. } c}{a \text{ --- } x \text{ --- } \frac{b}{ad CD. } c + \frac{dx}{a}}$$

$$\text{Quare erit per 16}^{\text{sexsi}} \square \text{AF, CD} \quad \square \text{AB, CF}$$

$$ac + dx \propto bx.$$

Transferatur dx ad alteram partem, ut incognitæ quantitates ab una parte habeantur

$$\text{eritque } ac \propto bx - dx.$$

Dividatur jam utraque pars per $b - d$

& fit $x \propto \frac{ac}{b-d}$. Hoc est, resolutâ æqualitate in proportionem, erit ut $b - d$ ad c , ita a ad x .

Id quod arguit, ad Problema hoc solvendum, statuendum esse ut GF ad CE, ita AF ad AB. Ut autem ipsum componatur, repetantur Resolutionis vestigia & ab ejus fine per eadem redeatur ad id unde initium cepit. Quemadmodum superius jam sæpius monstratum fuit, atque etiam hinc videre est, præmittendo prius Constructionem, quæ sic se habet.

Constructio.

Ductâ GH parallelâ AB vel CD ac æquali CE, agatur ex F per H recta FHD, secans AB, CD in B & D: dico AB ad ED esse, sicut AF ad CG, seu a ad d .

Finis Compositionis.

$$\text{AF CG} \quad \text{AB ED.}$$

Unde per 16^{sexsi} erit, ut a ad d , ita x ad f .

$$\square \text{AF, ED} \quad \square \text{CG, AB}$$

$$\text{erit similiter } af \propto dx.$$

$$\square \text{AF, CE}$$

Hinc dempto utrinque communi ac ,

Quare

DEMONSTRATIONIBUS. 379

$$\square AF, CE + \square AF, ED = \square AF, CE + \square CG, AB.$$

Quare erit etiam $ac + af \propto ac + dx$.

$$\square CF, AB = \square AF, CE + \square CG, AB.$$

Erat autem & $bx \propto ac + dx$.

$$\square CF, AB = \square AF, CD, \text{ seu } \square AF, CE + \square AF, ED.$$

Quare per 16 sexti erit $bx \propto ac + af$.

eritque ex similitudine \triangle lorum AFB, & CFD, ut a ad x , ita b ad $c + f$.

Esto jam $ED \propto f$,

$$\square CF, AB = \square AF, CE + \square CG, AB.$$

eritque $bx \propto ac + dx$.

$$\square CG, AB$$

Addatur utrinque dx ,

$$\square GF, AB \text{ seu } \square CF, AB - \square CG, AB = \square AF, CE.$$

erit per 16 sexti $bx - dx \propto ac$.

id est, reductâ proportionem ad æqualitatem,

$$GF \text{ GH vel } CE \text{ AF AB}$$

Ex constructione est, ut $b - d$ ad c , ita a ad x :

Principium Compositionis.

Relictis igitur hisce vestigiis demonstratio eisdem superstru-
cta erit talis.

Demonstratio.

Quoniam itaque ex constructione GF est ad GH vel CE ,
sicut AF ad AB : erit a rectangulum sub extremis GF, AB ^{a per 16}
æquale rectangulo sub mediis AF, CE . Quibus si addatur com- ^{sexti.}
mune rectangulum sub CG, AB , erit b rectangulum sub tota ^{b per 1 se-}
 CF & AB æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub $CG,$ ^{cundi.}
 AB . Porro, quoniam ex similitudine triangulorum AFB &
 CFD , AF est ad AB , sicut CF ad CD : erit c rectangulum ^{c per 16}
sub mediis CF, AB æquale rectangulo sub extremis, AF, CD , ^{sexti.}
hoc est, d æquale duobus rectangulis sub AF, CE & sub $AF,$ ^{d per 1 se-}
 ED . Erat autem quoque rectangulum sub CF, AB æquale duo- ^{cundi.}
 Bbb . 2 bus

e per 16
se. ii.

bus rectangulis sub AF , CE & sub CG , AB . Aequalia igitur erunt bina rectangula sub AF , CE & sub AF , ED binis rectangulis sub AF , CE & sub CG , AB . A quibus si commune auferatur rectangulum sub AF , CE , erit etiam reliquum rectangulum sub AF , ED aequale reliquo rectangulo sub CG , AB . Unde e ut AF ad CG , ita AB ad ED . Quod erat faciendum.

Haecenus quae praecesserunt Problemata & Theoremata istius naturae censeari possunt, quorum difficultas in demonstrationibus ex calculi vestigiis eliciendis potius quam in iisdem per Algebram solvendis & ostendendis consistere judicari debet. Et enim cum in Algebra Problemate aut Theoremate ad Aequationem perducto haec secundum certas regulas reducatur resolvaturque, at verò demonstratio Geometrica, quae ex eorum calculo depromenda est, non semper eisdem legibus sit obnoxia, sed diversimode prout requiritur, immutanda veniat, ut ipsa commodè feliciterque per Geometriae Elementa explicetur: visum nobis fuit hic consequenter illius contrarium in adductis aliquot exemplis patefacere, utpote in quibus praecipua difficultas in ipsorum per Algebram enodatione sita esse appareat. In quem finem duas primum Quaestiones Arithmeticas in medium afferam, ut, ipsis beneficio calculi huius Geometriae solutis, cuique fiat manifestum, quo pacto illius ignari deinde ad easdem solvendas ratiocinari possint, vulgaribus tantum Arithmetices regulis instructi. Quibus aliquot Quaestiones Geometricas ejusdem generis subjuncturus sum, quò simul constet plurimas etiam tales reperiri, post quarum solutionem Algebraicam ultrò velut sese offert solutio ipsarum Geometrica, ita ut quod illius demonstrationem insuper concernit Geometriae Elementa jam edoctos non effugiat.

Quaestio 44
primae partis
libri primi
Exercitationum
nostrarum
Mathematicarum.

Q U A E S T I O .

O Enopola duplex habet vinum, unius 8 stufis, alterius 14 stufis constat cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut
dolum

dolium vini vendere possit 35 florenis. Queritur, quot cantharos utriusque ad hanc mixtionem faciendam sumere debeat?

Ponatur eum debere sumere x cantharos primi 8 stuf. seu a ,
& y cantharos secundi 14 stuf. seu b .

Deinde supponendo dolium continere 80 cantharos seu c , & pretium 35 flor. vel 700 stuforum, quo ipsum vendi debet, vocari d : erit $x + y \propto c$

$$\text{Et } x \propto c - y.$$

Queratur jam quanti constent canthari utriusque vini, quo dolium impleri debet: dicendo

Canth. constat stuf., quanti constabunt Canth. stuf.
1 ——— a ——— x / facit ax . constant
canthari primi
vini, in dolium
infundendi

Canth. constat stuf., quanti constabunt Canth. stuf.
1 ——— b ——— y / facit by . constant
canthari secundi
vini, in dolium
infundendi

$$\begin{aligned} & \text{eritque summa } ax + by \propto d. \\ & \text{transf. } by \text{ in alt part. } \frac{ax \propto d - by}{a} \\ & \text{divid. utrinque per } a \frac{d - by}{a} \\ & \text{fit } x \propto \frac{d - by}{a}. \end{aligned}$$

Erat autem & $x \propto c - y$.

Quare erit $c - y \propto \frac{d - by}{a}$

$$\text{mult. utrinque per } a \frac{ac - ay \propto d - by}{a}$$

transf. quantitates, ut quæ
in y ductæ sunt unam te-
neant æquationis partem $by - ay \propto d - ac$

$$\text{div. utrinque per } b - a \frac{d - ac}{b - a}$$

& fit $y \propto \frac{d - ac}{b - a}$ vel $\frac{1d - 1ac}{b - a}$. Id est, erit ut
 $b - a$ ad 1, ita $d - ac$ ad y .

Bbb 3

Quæ-

Quæstione hæc ita resolutâ, ut constet, quo pacto in quæsti inventionem circa hæc facienda ratiocinari liceat, inspiciatur sequens illorum interpretatio.

Mult. $c.$ 80 Canth. seu, dolium
per $a.$ 8 stufri.

Subtr.

Ex $d.$ 700 stufri. constat dolium plenum
vino 8 & 14 stufriorum

fiunt $ac.$ 640 stufri. $ac.$ 640 stufri.

constat dolium plenum
vino 8 stufriorum.

Relinq. $d - ac.$ 60 stufri, quibus dolium plus
constat impletum vino 8 stufri. &
14 stufriorum, quàm plenum solo
vino 8 stufriorum: vel etiam, quibus
canthari 14 stufriorum in dolio
contenti cariores sunt cantharis
8 stufriorum, illorum loco
sumptis.

stufri.

Ex $b.$ 14

subtr. $a.$ 8 Canth.

$b - a.$ 6 stufri. — 1 —
differentia pretii
unius canthari

$d - ac.$ 60 stufri. / facit
differentia pretii
cantharorum in
dolio

subtr.

$c.$ 80 Canth. dolii

$\frac{1d - 1ac}{b - a}$ seu 10 canth. 14 stufriorum $\propto y$

rel. $c - y.$ 70 canth. 8 stufriorum $\propto x.$

Q U Æ S T I O.

*Quæstio 46
primæ par-
tis libri pri-
mi Exercita-
tionum
nostrarum
Mathematicarum.*

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufri. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

Ponatur ancillam debere accipere x poma, unde cum utriusque fructus 100 seu a simul pro $9\frac{1}{2}$ stufri. seu b habere velit, sequitur ipsam recipere debere $a - x$ pira.

Hinc cum 10 poma seu c offerantur 1 stufro seu d , & 25 pira seu e stufri 2 seu f , quærat quanti jam consent assumpta x poma, & $a - x$ pira.

Di-

Dicendo:

Poma constant stuf., quanti constabunt Poma stuf.
 $c \text{ — } d \text{ — } x / \text{ facit } \frac{dx}{c} \text{ . constant poma sumenda}$

Pira constant stuf., quanti constabunt Pira
 $e \text{ — } f \text{ — } a - x / \text{ facit } \frac{fa - fx}{e} \text{ . constant pira sumenda}$

$$\begin{array}{l} \text{eritque summa} \frac{dex + cfa - cfx}{ce} \text{ stuf.} \\ \text{mult. utrinque per } ce \frac{dex + cfa - cfx}{ce} \propto b. \\ \text{transf. } cfa \text{ ad alt. partem} \frac{dex + cfa - cfx}{ce} \propto cbe \\ \text{div. utrinque per } de - cf \frac{dex - cfx}{de - cf} \propto cbe - cfa \\ \text{\& fit } x \propto \frac{cbe - cfa}{de - cf} \end{array}$$

Ad fractionis hujus resolutionem, fiat ut e ad d , ita e ad quartam, quæ vocetur g : eritque $eg \propto de$. Unde pro $x \propto \frac{cbe - cfa}{de - cf}$ scribi poterit $x \propto \frac{cbe - cfa}{eg - cf}$ vel $\frac{be - fa}{g - f}$. Deinde fiat ut e ad f , ita a ad 4^{am}, quæ vocetur h : eritque $eh \propto fa$; ita ut pro $x \propto \frac{be - fa}{g - f}$ scribi possit $x \propto \frac{be - eh}{g - f}$. Hinc si demum fiat, ut $g - f$ ad e , ita $b - h$ ad 4^{am}, erit ea $\propto x$, quantitati quæ sitæ sumendorum porum.

Quæ itaque ad quæstionis solutionem citra Algebram sequenti modo argumentandum esse inferunt

Poma stuf. Poma

$c \quad d \quad e \quad g$
 $10 \text{ — } 1 \text{ — } 25 / \text{ facit } 2\frac{1}{2} \text{ stuf. constant } 25 \text{ Poma.}$
 subtr. f. 2 stuf. pretium 25 pirorum.

Relinq. $g - f. \frac{1}{2}$ stuf. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

Pira stuf. Pira Subtr.

$e \quad f \quad a \quad b. 9\frac{1}{2} \text{ stuf. constant } 100 \text{ poma \& pira simul}$
 $25 \text{ — } 2 \text{ — } 100 / \text{ facit } b. 8 \text{ stuf. constant } 100 \text{ pira}$

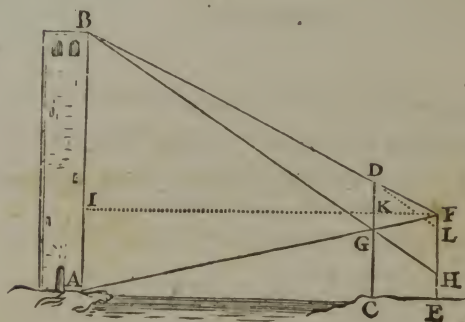
relinq. $b - h. 1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma & pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam, qui-

quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.

stuf. differ.	Poma	stuf. differ.	Subtr.
$g-f$	e	$b-h$	$a.100$
$\frac{1}{2}$	25	$1\frac{1}{2}$	facit $x. 75$ poma
			& $a-x. 25$ pira.

P R O B L E M A.

Metiri altitudinem turris AB, ut & distantiam AC, beneficio duorum baculorum CD, EF, datis $GD \propto a$, $CE \propto b$, & $HF \propto c$.



Esto $AC \propto x$,
& $AB \propto y$.

Series *Analyscos*.

Ductâ IF parallelâ AE, erit propter similitudinem \triangle rum ABF & GDF

ut AB ad IF vel AE, ita GD ad KF vel CE.

$$y \text{ --- } x+b \text{ --- } a / b.$$

Ac proinde per 16 sexti

$$by \propto ax + ab.$$

Eodem modo, erit propter similitudinem \triangle rum BDG & BFH
ut BD ad BF, sive IK ad IF

hoc est, AC ad AE, ita GD ad HF.

$$x \text{ --- } x+b \text{ --- } a / c.$$

Adeo-

Adeoq̃ue per 16 sexti

$$cx \propto ax + ab.$$

Auferatur utrinque ax ,

$$\& \text{ fit } cx - ax \propto ab.$$

Dividatur jam utraque pars per $c - a$,

eritq̃ue $x \propto \frac{ab}{c-a}$. Hoc est, resolvendo æqualitatem in proportionem, erit ut $c - a$ ad a , ita b ad x .

Jam cum eidem æqualia inter se quoque sint æqualia erit $by \propto cx$. Hoc est, erit ut b ad c , ita x ad y .

Quod si autem invenire lubeat y , non inventâ priûs x , subrogetur in hujus locum in æquatione ultimò hîc inventâ valor ejus inventus $\frac{ab}{c-a}$,

$$\text{fietq̃ue } by \propto \frac{abc}{c-a}.$$

Ubi, si utrinque dividatur per b , invenietur $y \propto \frac{ac}{c-a}$. Quæ quidem æqualitas in proportionem sic resolvitur, dicendo: ut $c - a$ ad a , ita c ad y . E quibus itaq̃ue hujusmodi Constructio seu operandi modus elucescit.

Sumptâ HL æquali GD , junctâq̃ue DK , fiat ut $c - a$ ad a , hoc est, ut FL ad LH , sive FD ab DB , sive etiam FG ad GA , ita EC seu b ad CA seu x ; & ita quoque FH seu c ad AB seu y .

Cujus demonstratio ex 2^{da} & 4^{ta} sexti libri Elementorum perspicua est, quippe considerando rectam DL ipsi BH parallelam secare proportionaliter rectas BF , FH , perinde ac DC , quæ ipsi AB est parallela, secat rectas AF , AE ; ut & rectam FE eidem AB parallelam, facientem \triangle similia GFH & GAB .

Cæterum ut praxis hujus Problematis cuiusvis obvia sit, visum fuit illud per numeros illustrare, ut sequitur.

digit.

$$\text{Ero } GD \propto a \propto 24$$

$$CE \propto b \propto 30$$

$$\& HF \propto c \propto 25.$$

Ccc

Ut

Ut FL ad LH,
 feu FD ad DB,
 five etiam FG ad GA,
 1 — 24, ita $\left\{ \begin{array}{l} \text{EC. } 30 \\ \text{FH. } 25 \end{array} \right\}$ ad $\left\{ \begin{array}{l} \text{CA. } 720. \\ \text{AB. } 600. \end{array} \right.$ digit.

PROBLEMA.

Metiri distantiam turrium A, B, cùm ad A pervenire licet, datis $CA \propto a$, $AD \propto b$, $CD \propto c$, $AE \propto d$, & $CF \propto e$.

Esto $AB \propto x$.

Series *Analyses*.

Ductâ GE parallelâ CD, fiat propter similitudinem $\triangle^{rum} ADC$ & AEG,

ut AD ad DC, ita AE ad EG

$$b \text{ — } c \text{ — } d / \frac{cd}{b} :$$

itemque

ut AD ad AC, ita AE ad AG.

$$b \text{ — } a \text{ — } d / \frac{ad}{b} .$$

Hinc propter similia

$\triangle^{la} CBF$ & GBE

erit ut

CF ad CB, ita GE add. AB. x.

$$e \text{ — } a + x \text{ — } \frac{cd}{b} / \text{ad GB. } \frac{ad + bx}{b}$$

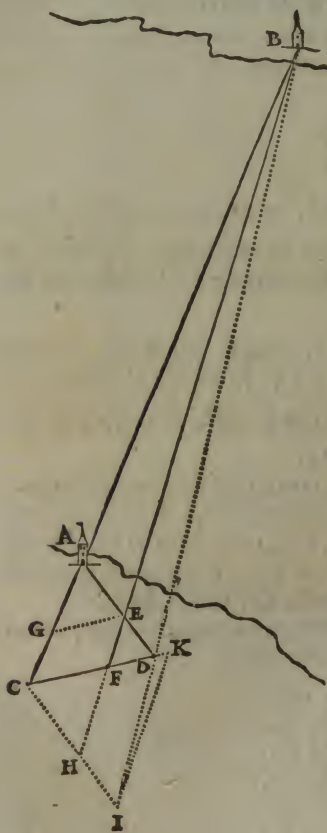
Ac proinde per 16 sexti erit

$\square CF, GB$ æquale $\square CB, GE$

$$\frac{ade + bex}{b} \propto \frac{acd + cdx}{b} .$$

Inventâ igitur æquatione, ut evanescant fractiones, multiplicetur utrinque per b , & fit $ade + bex \propto acd + cdx$.

Transferantur jam quantitates, ita



ita ut quæ in x ductæ sunt unam partem æquationis obtineant, reliquæ autem alteram

$$\text{fiatque } be - cd \propto acd - ade.$$

Denique dividatur utrinque per $be - cd$

$$\text{eritque } x \propto \frac{acd - ade}{be - cd}.$$

Jam ut æqualitas hæc omnium facillime in proportionem resolvatur, simulque inde eluceat, quo pacto quis ratiocinari teneatur, ut quæsitam lineam AB seu x ex datis quam brevissime inveniat: animadvertere oportet, quænam litera plurimum omnium in hisce terminis reperiatur. Quæ igitur cum hic deprehendatur esse d , ipsaque se ter prodat, ubi reliquæ non nisi bis offenduntur, faciendum est, ad deprimendas dimensiones, ut illa in omnibus terminis inveniat. In quem finem si fiat ut d ad b , ita e ad 4^{tam} , quæ vocetur f : erit $df \propto be$, ac proinde $x \propto \frac{acd - ade}{df - cd}$

seu $\frac{ac - ae}{f - c}$. nimirum, abbreviando terminos omnes per d . Ubi si demum fiat ut $f - c$ ad $c - e$, ita a ad 4^{tam} : erit ipsa $\propto x$, hoc est, \propto quæsitæ lineæ AB . Atque ita apparet longitudinem ejus duabus regulis trium seu proportionum inveniri posse, quæ alias 3^{bus} aut pluribus investiganda foret, si nullum in resolvenda hac fractione fieret discrimen.

Ubi notandum, eandem fractionem $\frac{acd - ade}{be - cd}$ etiam alio modo in duas proportionum regulas esse resolvibilem, quæ singulæ sicut præcedentes non præter unam dimensionem agnoscunt sive omnino simplices existunt. Nimirum considerando in duobus terminis reperiri cd , & in singulis reliquorum duorum reperiri e ; adeò ut, si planum cd in aliud transmutetur, cujus unum latus sit e , litera c sic in omnibus terminis haberi valeat, quæ deinde omitti possit. Ac proinde si statuatur, ut e ad c , ita d ad 4^{tam} , quæ vocetur g : erit $eg \propto cd$, ita ut pro $\frac{acd - ade}{be - cd}$ scribi possit $\frac{aeg - ade}{be - eg}$ vel $\frac{ag - ad}{b - g}$. Unde si rursus fiat ut $b - g$ ad $g - d$, ita a ad 4^{tam} : erit ea $\propto x$, lineæ quæsitæ AB . Quæ quidem animadversio, cum in abstracto fiat nullâ factâ calculi relatione sive restrictione ad figuræ lineas, luculenter ostendit, quàm perperam judicent illi, qui non ritè perspicientes hujus Geometriæ Methodum

dum constructiones concinnas aliunde potius quàm ex ejus calculo derivari autumant. Quod utique plurimis exemplis demonstrare possem, iisque non inelegantibus, sed cum id prolixius explicare non sit hujus loci, hæc in medium attulisse suffecerit.

Denique ut pateat, quo pacto præcedentis fractionis resolutio ad figuræ lineas pertineat eaque simul nobis manifestet, quales lineæ ducendæ sint, quæ nos ad quæsitum finem perducant: consequens fuerit ut ea quæ ad facilitatem reductionis circa calculum seorsim sumus meditati ad figuræ lineas referamus. Constructio igitur sive operandi modus talis est.

Fiat ut d ad b , hoc est, ut AE ad AD sive CH ad CI , ita CF seu e ad CK seu f . Deinde fiat ut $f - e$ ad $e - e$, hoc est, ut KD ad DF sive ID ad DB , ita CA seu a ad AB seu x .

Cujus demonstratio ex ipsa proportionalium applicatione manifesta est.

Eadem manente fractionis resolutione possunt dictæ proportionales diversis aliis modis figuræ accommodari, indeque velut aliæ constructiones concinnari, quibus licet figuræ valde dissimiles appareant, operatio tamen una eademque existit. Quas quidem omnes hic exponere propter earum multitudinem supervacuum duximus. Idem intellige cum præcedens fractio secundo modo resolvitur.

Unde colligere licet, cum ex sola applicatione harum proportionalium, manente resolutione fractionis aut eadem aliquantulum immutatâ, complures viæ ultro quasi sese prodant, quibus à datis ad quæsitum perducamur, quanto ideo cum emolumento hujus Geometriæ calculus ad omnifarias quæstiones adhibeatur; utpote cujus beneficio non modò difficultas omnis breviter ob oculos ponitur, sed etiam quid circa illas sit factu opus plene edocetur.

Cæterum ut iis, quibus hujus generis Problemata arident, quæ absque ullo instrumento Mathematico in campo perfici queunt, etiam praxis allati Problematis constet, visum fuit illud fervendo priorem fractionis resolutionem secundum superiorem ejus applicationem per numeros illustrare, ut sequitur.

Esto

pedum

$$\text{Est } CA \propto a \propto 450$$

$$AD \propto b \propto 390$$

$$CD \propto c \propto 420$$

$$AE \propto d \propto 225$$

$$\& CF \propto e \propto 252.$$

Tum fiat

Ut AE ad AD,

five CH ad CI, ita CF ad CK

$$225 - 390 - 252 / 436\frac{2}{3}$$

$$CD. 420$$

$$\text{subtr. } CD. 420 \text{ subtr. } CF. 252$$

ped.

$$\text{Deinde, ut DK. } 16\frac{2}{3} \text{ ad FD. } 168, \text{ ita CA. } 450 \text{ ad AB. } 4500.$$

$$\text{Sive ut ID ad DB}$$

P R O B L E M A.

Trianguli ABC producto latere AC ad D, ductâ-
que rectâ DEF, secante CB, AB in E & F, dantur
 $AB \propto a$, $BC \propto b$, $AC \propto c$, $CD \propto d$, & $CE \propto e$:
oporteatque invenire $AF \propto x$.

Series *Analyscos*.

Ductâ FG parallelâ BC, fiat propter similitudinem triangu-
lorum ABC & AFG

ut AB ad BC, ita AF ad FG

$$a - b - x / \frac{bx}{a}.$$

$$Ccc \ 3$$

Item-

Itemque

ut A B ad A C, ita A F ad A G

A C

G C

 $a \text{ --- } c \text{ --- } x / \frac{cx}{a}$. quæ subducta ex c , relinquit $\frac{ca-cx}{a}$.
Hinc propter similia \triangle^a C E D & G F D

erit

ut E C ad C D, ita F G

add. C D. d

 $e \text{ --- } d \text{ --- } \frac{bx}{a}$ / ad G D. $\frac{da+ca-cx}{a}$.

Ac proinde per 16 sexti

 \square E C, G D \square C D, F G
 $\frac{dae+cae-cex}{a} \propto \frac{dbx}{a}$.
mult. utrinque per a
 $\frac{dae+cae-cex \propto dbx}{a}$
add. utrinque cex
 $\frac{dae+cae \propto dbx+cex}{a}$
div. utrinque per $db+ce$
 $\& \text{ fit } \frac{dae+cae}{db+ce} \propto x$.

Ad resolvendam hanc fractionem, fiat ut e ad d , ita b ad 4^{tam} , quæ vocetur f : eritque $fe \propto db$, adeoque $x \propto \frac{dae+cae}{fe+ce}$ seu $\frac{da+ca}{f+c}$. Deinde fiat ut $f+c$ ad a , ita $d+c$ ad x . Quod ipsum docet, ut ex datis lineis investigetur quæsita linea A F, ducendam esse ex B lineam B H ipsi F E D parallelam, donec occurrat productæ A C D in H. Cum enim statuendum sit ut e ad d , hoc est, ut C E ad C D, ita b seu C B ad 4^{tam} f : patet hanc fore ipsam C H. Ac proinde si porrò fiat ut $f+c$ ad a , hoc est, ut A H ad A B, ita $d+c$ seu A D ad x : manifestum est inveniri hinc quantitatem quæsita lineæ A F; ita ut hic sicut in duobus præcedentibus Problematis demonstratio ex sola proportionalium applicatione per se perspicua sit.

Quòd si autem quis alio operandi modo aut etiam eodem sed aliarum linearum ductu quæsitam lineam A F invenire desideret, observare poterit ea, quæ à nobis in antecedenti Problemate indicata sunt.

Cæterùm cum & praxis hujus Problematis in extruendis fortaliis, chomatibus, promontoriis, aliisve, non parvi usus existat: nimirum, ubi in fluvio, mari, aut locis paludosis à certo puncto

puncto seu termino recta linea determinari debet, datum continens virgarum pedumve numerum: non abs re fuerit, si & illius praxin paucis hic explicavero, præsertim cum absque ullo instrumento Mathematico negotium hoc expedire liceat.

Ponamus itaque in directum ipsius AC à C usque ad D definienda esse recta CD, continens 10 perticas seu virgas. In quem finem erectis tribus baculis, A, C, & B, efformantibus triangulum qualecunque ABC, ac inter B & C erecto ubicunque quarto E, si mensurentur AB, BC, AC, & CE, sitque, ex. gr., AB ∞ 4 ∞ 15, BC ∞ b ∞ 13, AC ∞ c ∞ 14, & CE ∞ e ∞ 5 perticarum seu virgarum: oportebit ex his juxta & ipsa CD ∞ d ∞ 10 quæ- rere longitudinem lineæ AF, perinde ut supra atque ex sequenti operatione videre est.

CE	CD	CB		Add.
5	10	13	ad CH. 26	AC. 14
		add. AC. 14	AB	CD. 10
		AH. 40	15	AD. 24

ad AF. 9.

Hinc si ab A versus B in recta AB mensurentur 9 pertica seu virga, atque in F hujus mensurationis termino baculus erigatur, fiet, ut, si à C in directum ipsius AC progrediamur, extruendo aggerem aut etiam navigando cum scapha, donec perventum fuerit in directum ipsius FE, recta CD tunc 10 perticarum seu virgarum sit futura. qualis requirebatur.

Qui plura hujus generis Problemata videre desideret, adeat Appendicem nostram de Simplicium Problematum constructione, quam unâ cum Exercitationibus nostris Mathematicis haud ita pridem in lucem emisimus, ubi ista fusiùs pertractantur, etiam sine ullius calculi adjumento.

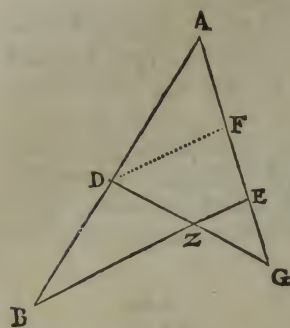
PROBLEMA,

cujus solutione innotescit, quâ ratione priora duo Theoremata 11^m Capitis 1^m libri Almagesti PTOLEMÆI inventa fuerint seu inveniri possint.

In rectas AB, AG ductis utcunque rectis BE, DG, se mutuò decussantibus in Z, detur ratio GD ad DZ,

ut

ut a ad b , nec non ratio ZB ad BE , ut c ad d : oportetque invenire rationem GA ad AE .

Series *Analyseos*.

Esto $GD \propto a$

$DZ \propto b$, eritque $ZG \propto a-b$

$BZ \propto c$

$BE \propto d$, eritque $ZE \propto d-c$

$AG \propto x$

& $AE \propto y$, eritque $EG \propto x-y$.

Ductâ DF parallelâ BE , erit
per 2 sexti

ut GZ ad ZD , ita GE ad AE . $\frac{y}{a-b-b-x-y} / \text{ad } EF. \frac{bx-by}{a-b} \left. \vphantom{\frac{y}{a-b-b-x-y}} \right\} \text{subtr.}$
rel. $AF. \frac{ay-bx}{a-b}$.

Tum fiat propter similia $\triangle^a GZE$ & GDF

ut GZ ad ZE , ita GD ad $DF. \frac{ad-ac}{a-b}$.

Quibus sic constitutis, erit ex similitudine $\triangle^lorum DAF$ & BAE

ut DF ad AF , ita BE ad AE

$\frac{ad-ac}{a-b} - \frac{ay-bx}{a-b} = d / y$.

Et fit per 16 sexti

$\frac{ady-acy}{a-b} \propto \frac{ady-bdx}{a-b}$.

Hoc est, omisso communi denominatore $a-b$

erit $ady-acy \propto ady-bdx$.

Unde dempto utrinque ady , ac reliquis hinc inde translatis,
ut signo + addeantur

habebitur $bdx \propto acy$.

Quæ æqualitas in proportionem sic resolvitur

ut x ad y , ita ac ad bd .

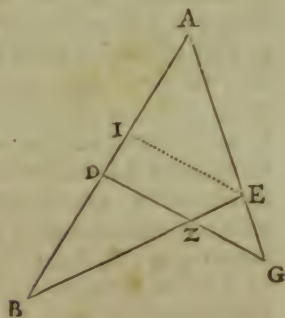
Quod

Quod ipsum docet, rationem quæsitam GA ad AE seu x ad y esse compositam ex ratione GD ad DZ seu a ad b , & ex ratione ZB ad BE seu c ad d , id est, rationem GA ad AE per 23 sexti esse eandem, quàm rectanguli sub GD , BZ seu ac ad rectangulum sub BE , DZ seu bd . Atque ita constat, quo pacto primum dictorum Theorematum inventum fuerit seu inveniri possit. Id autem ex Rheinoldi versione ita sonat.

In duas rectas lineas AB & AG deductæ due rectæ lineæ BE & GD secant se mutuo in puncto Z . Dico quod ratio GA ad AE composita est ex ratione GD ad DZ , & ex ratione ZB ad BE .

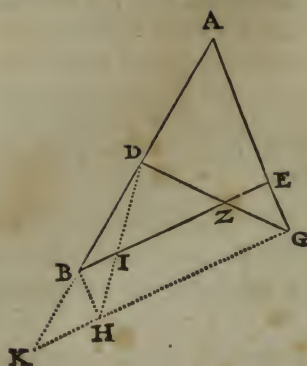
Hinc postquam innotuit, quo pacto datis rationibus GD ad DZ , & ZB ad BE etiam dari intelligatur ratio ipsius GA ad AE , utpote quæ ex datis hisce rationibus est composita: haud inutile fuerit, si ulterius hic ostendam, quibus datis lineis hæc quæsitæ ratio exprimatur, quandoquidem ratio dari dicitur cui eandem exhibere valemus.

In quem finem si inventa ratio ac ad bd ad communem altitudinem redigatur, quod quidem quadrupliciter fieri potest, sumendo ad hoc aliquam ex datis lineis, obtinebitur quæsitæ ratio in simplicissimis terminis.

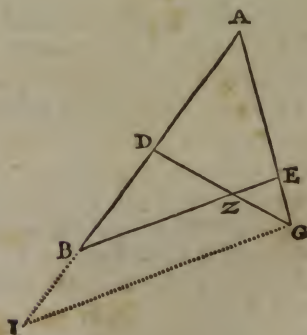


Etenim assumendo communem altitudinem e , si fiat ut e ad d , ita b ad 4^{ta} , quæ vocetur e : erit $ce \propto bd$, ita ut quæsitæ ratio sit eadem, quæ ac ad ce , hoc est, rejectâ communi altitudine e , ut a ad e . Quod ipsum Ptolemæi figuram prodit, in qua ex puncto E ducta est EI parallela ipsi GD . Si enim in ea fiat ut e ad d , id est, ut ZB ad BE , ita DZ seu b ad 4^{ta} e , erit ea linea EI ; ita ut GD ad EI seu a ad e quæsitam rationem manifestet, eandem quippe quæ est ipsius GA ad AE . Ut patet ex 4^{ta} sexti, propter similitudinem $\triangle DAG$ & IAE .

Sic etiam assumendo communem altitudinem a , si fiat ut a ad b ,
 Dd hoc

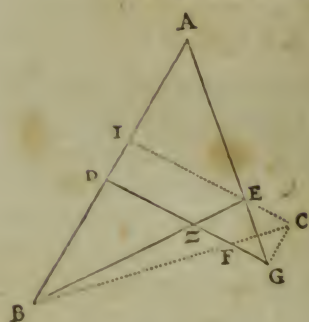


hoc est, ut DG ad DZ, ita HG vel BE seu d ad 4^{tam} , quæ vocetur f : erit ea \propto ZI. Et fit $af \propto bd$, ita ut quæsitæ ratio sit eadem, quæ ac ad af , hoc est, rejectâ a communi altitudine, eadem quæ c ad f seu BZ ad ZI. Hanc autem eandem esse, quam ipsius GA ad AE, ita patet. Productis namque AB, GH donec coeant in K, erit propter similitudinem Δ^{rum} BDZ, KDG, lineamque DH similiter in utroque ductam, ut BZ ad ZI, ita KG ad GH seu BE. Ut autem KG ad BE, ita est, propter similitudinem Δ^{rum} KAG & BAE, quoque GA ad AE. Quare etiam BZ ad ZI erit, ut GA ad AE. Unde liquet, si a pro communi altitudine sumatur, ducendam esse ex G rectam GH ipsi BE parallelam, donec occurrat rectæ ex B ductæ ipsi AG parallelæ in H: eritque, junctâ HD, BZ ad ZI ratio quæsitæ.



Haud secus, si assumatur communis altitudo b , fiatque ut b ad a , hoc est, ut ZD ad DG, ita BZ seu c ad 4^{tam} , quæ vocetur g : erit ea \propto IG. Et fit $bg \propto ac$, ita ut quæsitæ ratio GA ad AE eadem sit, quæ bg ad bd , hoc est, rejectâ communi altitudine b , eadem quæ g ad d seu IG ad BE. ut patet ex similitudine Δ^{rum} IAG & BAE. Quod ipsum arguit, sumendo b pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GI ipsi BE parallelam, donec occurrat productæ AB in I, ut habeatur ratio quæsitæ IG ad BE.

Nec

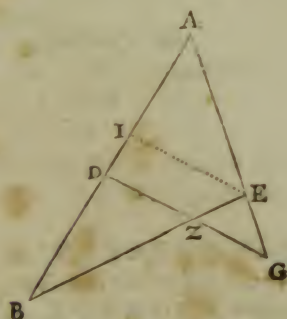


Nec aliter fit, si, assumpta communi altitudine d , fiat ut d ad e , hoc est, ut BE ad BZ , ita GD vel IC seu a ad a_{tan} , quæ vocetur b : erit ea $\propto DF$. Et fit $db \propto ac$, ita ut quæsitâ ratio sit eadem, quæ db ad bd , hoc est, rejectâ communi altitudine d , eadem quæ h ad b seu DF ad DZ .

Hanc autem eandem esse, quam GA ad AE , ita patet.

Est enim, propter similitudinem $\Delta^{rum} BDF$ & BIC , lineamque BE in utroque similiter ductam, ut DF ad DZ ita CI seu DG ad IE . Ut autem DG ad IE , ita est, propter similitudinem $\Delta^{rum} DAG$ & IAE , GA ad AE . Quocirca & DF ad DZ erit, ut GA ad AE . Atque ita liquet, sumendo d pro communi altitudine, ducendam esse ex G rectam GC ipsi BA parallelam, donec occurrat rectæ per E ipsi DG parallelæ in C , rationem quæsitam esse DF ad DZ .

Cæterum ut pateat, qua ratione demonstratio præcedentis Theorematis, qualis à Ptolemæo assertur, ex allatis deduci possit; ut & quo pacto exinde plures alias demonstrationes similes conficere liceat: visum fuit eandem unâ cum aliis tribus, à me deductis, hic subungere, calculique vestigia, quibus innituntur, simul hic adhibere atque patefacere.



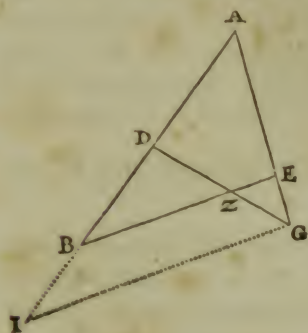
Ut supra est
 $ZB \quad BE \quad DZ \quad IE$
 $c \quad d \quad b \quad e$
 & $ce \propto bd$.

Ratio
 $GA \text{ ad } AE$
 $a \quad c \quad \dots \quad b \quad d$
 vel $a \quad c \quad \dots \quad c \quad e$
 seu $GD \quad EI$
 $a \quad \dots \quad c$
 $\cdot DZ \cdot BE$
 med. term. $\cdot b \cdot d$
 ZB
 $c \quad \dots \quad e$

DEMONSTRATIONIBUS. 397

etiam erit GA ad AE, sicut BZ ad ZI. Hinc assumpta forinsecus lineâ BE, quoniam ratio BZ ad ZI composita est ex ratione BZ ad BE, & ex ratione BE vel HG ad ZI, id est, propter similitudinem Δ^{rum} HDG & IDZ, ex GD ad DZ: erit perinde ratio GA ad AE composita ex ratione BZ ad BE, & ex ratione GD ad DZ. Quod erat ostendendum.

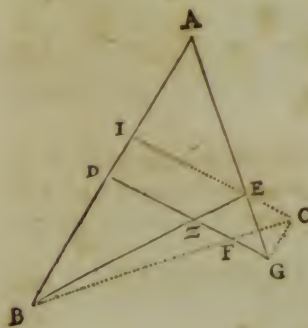
Adhuc aliter.



Ut supra est	Ratio
DZ GD BZ IG	GA ad AE
$b - a - c / g$	$ac \dots bd$
& $bg \propto ac$.	vel $bg \dots bd$
	$\frac{IG}{BE}$
	seu $g \dots d$
	$GD \cdot BZ \dots$
	$a \cdot c \text{ med.ter.}$
	$\dots DZ$
	$\cdot b.$

Etenim ductâ GI parallela BE, usque dum occurrat productæ AB in I: erit, propter similitudinem Δ^{rum} IAG & BAE, ut GA ad AE, ita IG ad BE. Hinc cum, assumptâ forinsecus rectâ BZ, ratio ipsius IG ad BE composita sit ex ratione IG ad BZ, id est, propter similitudinem Δ^{rum} IDG & BDZ, ex GD ad DZ, & ex ratione BZ ad BE: erit pariter ratio GA ad AE ex iisdem rationibus composita. Quod erat ostendendum.

Vel etiam hoc pacto:



Ut supra est	Ratio
BE BZ GD DF	GA ad AE
$d - c - a / b$	$ac \dots bd$
& $dh \propto ac$.	vel $dh \dots bd$
	$\frac{DF}{DZ}$
	seu $b \dots b$
	$BZ \dots$
	$c \cdot DG \text{ vel } IC$
	$\cdot a \cdot \text{ med.ter.}$
	$\cdot BE$
	$\cdot d.$
	Ductâ

Ddd 3

Ducta G C ipsi B A parallelâ, donec occurrat rectâ I E C ipsi D G parallelâ in C, jungatur B, secans D G in F.

Quoniam itaque, propter similitudinem Δ^{rum} D A G & I A E, G A est ad A E, sicut G D vel I C ad I E; at ut I C ad I E, ita quoque est, propter similitudinem Δ^{rum} B I C & B D F, lineamque B E in utroque similiter ductam, D F ad D Z: erit etiam G A ad A E, sicut D F ad D Z. Assumatur jam forinsecus linea D G. Hinc cum ratio D F ad D Z sit composita ex ratione D F ad D G vel I C, sive B Z ad B E, & ex ratione D G ad D G: erit similiter ratio G A ad A E composita ex ratione B Z ad B E, & ex ratione D G ad D Z. Quod erat ostendendum.

Idem pariter de 2^{do} P T O L E M Æ I Theoremate aliisque similibus est intelligendum.

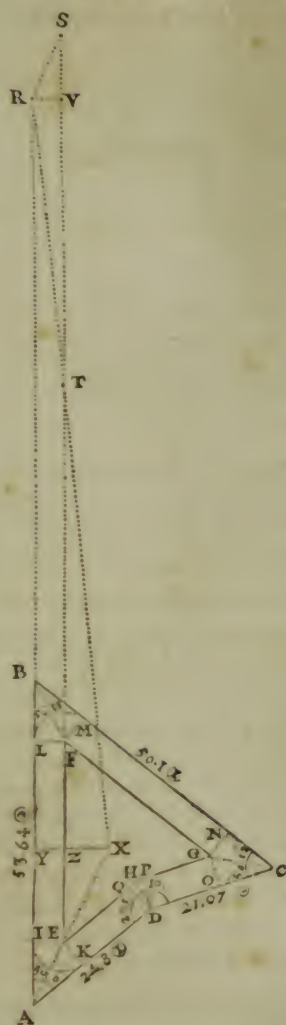
Vnde constat, presuppositâ Algebra cognitione, haudquam necessaria esse existimanda, quæ de Rationum Logistica communiter traduntur, non magis quàm si ad cuiusvis generis quæstiones per Algebram solvendas multifaria addiscantur Theoremata: cum & invenire illa & demonstrare ipsius Algebra sit munus, quam quidem excolendo non modò ingenium exercetur, sed res ipsa funditus eruitur, citra eam verò sæpius illa ipsa Theoremata non satis feliciter adhibentur.

P R O B L E M A.

Latifundii A B C D cognitis omnibus lateribus & angulis, ab eodem datam portionem rescare, lineis E F, F G, G H, & H E latifundii lateribus A B, B C, C D, & D A parallelis, & ab iisdem pari ubique intervallo distitis.

Iunctis A E, B F, C G, & D H, demittantur ex E, F, & G super A B, B C, C D, & D A perpendiculares E I, F L, F M, G N, G O, & E K; at ex D super G H & H E perpendiculares D P & D Q.

Quoniam itaque in rectangulis triangulis A I E & A K E quadrata



drata quæ fiunt ex AI,
IE nec non ex AK, KE
quadrato ex AE per 47
primi Elementorum sunt æ-
qualia, erunt & ipsa in-
ter se æqualia. Est autem
quadratum ex EI æqua-
le quadrato ex EK, quip-
pe ob æqualitatem recta-
rum EI, EK, æquale
intervallum indicantium;
Quare etiam quadratum
ex AI quadrato ex AK
æquale erit, adeoque &
AI æqualis AK. Hinc
cum tria latera trianguli
AIE æqualia sint tribus
lateribus trianguli AKE,
erit quoque angulus IAE
angulo KAE per 8 primi
æqualis, ac proinde an-
gulus BAD per rectam
AE bifariam divisus.
Haud secus liquet, angu-
los ad B, C, & D per
rectas BF, CG, & DH
bifariam divisos esse.

Series *Analyseos.*

Esto $AB \propto a$
 $BC \propto b$
 $CD \propto c$
 $DA \propto d$
& EI, FL, FM, GN, GO,
DP, DQ, vel EK $\propto x$.

Jam cum propter datos angulos A, B, C, & D etiam eorum se-
missiles dati sint, erit in unoquoque triangulorum ad angulos hosce
constitutorum data quoque ratio laterum,

Pona.

Ponatur itaque EI ad IA vel EK ad KA esse, ut e ad f
 FL ad LB vel FM ad MB, ut e ad g
 GN ad NC vel GO ad OC, ut e ad b
 & DP ad PH vel DQ ad QH, ut e ad i .

Tum fiat EI vel EK AI vel AK
 ut e ad f , ita x / ad $\frac{fx}{e}$
 FL vel FM LB vel BM
 ut e ad g , ita x / ad $\frac{gx}{e}$
 GN vel GO NC vel CO
 ut e ad b , ita x / ad $\frac{bx}{e}$
 DP vel DQ PH vel HQ
 ut e ad i , ita x / ad $\frac{ix}{e}$.

Additis jam AI, AK, LB, BM, NC, CO, si ipsarum summa
 $\frac{2fx+2gx+2bx}{e}$ auferatur ex $a+b+c+d$, summa laterum AB,
 BC, CD, & DA, relinquetur $a+b+c+d - \frac{2fx-2gx-2bx}{e}$,
 summa rectarum IL, MN, OD, & DK, id est, ipsarum EF,
 FG, GP, & QE. Quibus si addatur $\frac{2ix}{e}$, summa ipsarum PH,
 HQ, erit $a+b+c+d - \frac{2fx-2gx-2bx+2ix}{e}$ summa late-
 rum internorum EF, FG, GH, & HE. Porro quoniam portio
 abscindenda, quæ vocetur k , pro trapezio accipi potest, cujus
 duo latera sunt parallela, sit ut si AB, BC, CD, & DA in rectam
 lineam AR junctim collocentur, ut & EF, FG, GH, & HE in
 rectam lineam ET, trapezium ARTE ipsi portioni abscin-
 dendæ k futurum sit æquale. Quocirca si juxta vulgarem regu-
 lam hujus area quærat, addendo scilicet latera parallela AR
 & ET, & semissem summæ multiplicando per ipsius latitudi-
 nem EI seu x , habebitur æquatio inter $ax+bx+cx+dx$
 $-\frac{fxx-gxx-hxx+ixx}{e}$ & k , id est, æquatione ritè ordinatâ,
 erit $xx \propto \frac{ax+bx+cx+dx}{f+g+h-i} - \frac{ke}{f+g+h-i}$. Cujus radices
 inveniuntur operando ulterius, quemadmodum pag. 7 hujus
 Geo-

Geometriæ indicatur, quarum quidem major dum lineam exhibet quæsitâ EI manifestè majorem, idcirco meritò hic erit negligenda.

Quoniam autem ex E, F, G, & D intervallis EI vel EK, FL vel FM, GN vel GO, & DP vel DQ descriptis circulis rectæ AI vel AK, LB vel BM, NC vel CO, & PH vel HQ tangentibus sunt complementorum semissium datorum angulorum A, B, C, & D; fiet ut, si e pro radio sumatur, ipsæ $f, g, h,$ & i dictas tangentes designent. Quod cum eodem modo de omnibus aliis figuris rectilineis intelligendum sit, à quibus hujusmodi portio rescari debet: haud difficulter poterimus, si angulos A, B, C similesque vocemus externos, at angulum D internum, ut & eos omnes, qui hujusce generis existunt, atque præter æquationis constitutionem spectemus insuper, quænam ad illam resolvendam sive ad quæsitam latitudinem ex ea obtinendam sint facienda, regulam inde generalem formare, quæ sic se habet.

Additis figuræ lateribus, multiplicetur summa per radium 100000, productumque dividatur per summam tangentium, angulorum qui semissium datorum sunt complementa, cum videlicet dati anguli omnes sunt externi, aut per earundem differentiam, quum externi ac interni existunt, & fit primum inventum.

Deinde multiplicatâ areâ portionis abscondendæ per radium 100000, dividatur productum per prædictam summam vel differentiam tangentium, & fit secundum inventum. Quo subducto à quadrato semissis primi inventi, si reliqui radix ab eodem semisse auferatur, relinquetur latitudo quæsitâ.

Inventâ igitur per Algebram viâ, quâ Problema propositum solvendum sit, ipsius veritas ex sequentis calculi applicatione, quæ ab ea parùm est aliena, manifesta fiet; si modò ibidem consideraverimus, completo parallelogrammo ARSE, productisque AE, RT donec coeant in X, rectam ST, duplum supra dictæ summæ vel differentiæ tangentium referre, atque demissis perpendicularibus RV & XY rectam ST ad RV, ob similitudinem triangulorum STR & ARX, eam habere rationem, quam AR habet ad XY.

Ecc

An-

DE CONCINNANDIS

402

Angul.

A. 50. 0'

Add.

femissis. 25. 0', ejus Tang. Compl.

B. 50. 38' AI vel AK est 214451

femissis. 25. 19, ejus Tang. Compl.

C. 54. 12' LB vel BM est 211392

femissis. 27. 6, ejus Tang. Compl.

NC vel CO est 195417

D. 205. 10'

621260

femissis. 102. 35, ejus Tang. Compl.

PH vel HQ est 22322

differentia 598938

2 Rad. RV. DA. 248

partes ST. 1197876—100000—AR. 14961 ②

multipl.

AR. 14961 ②

ad XY. 1249 ②.

Ut $\triangle ARX$ seu $\frac{1}{2}XY$, AR

ad $\square XY$ seu XY , XY,

vel, relicta communi

altitudine XY

ut $\frac{1}{2}AR$ ad XY,

sive etiam, propter

simil. \triangle rum STR

& ARX

ut $\frac{1}{2}ST$ ad RV, ita

femissis seu triang. ARX. 93413144 ④

subtr. part. re- ARTE. 600

sec. seu trap.

598938—100000—rel. triang. ETX. 3343144 ④ / ad $\square XZ$. 558178 ④

eritque XZ. 71 41 7.3.

Hinc subducta XZ seu 747 ② ex XY seu 1249 ②, relinque-
tur 502 ② pro YZ latitudine quæ sita portionis abscindendæ.

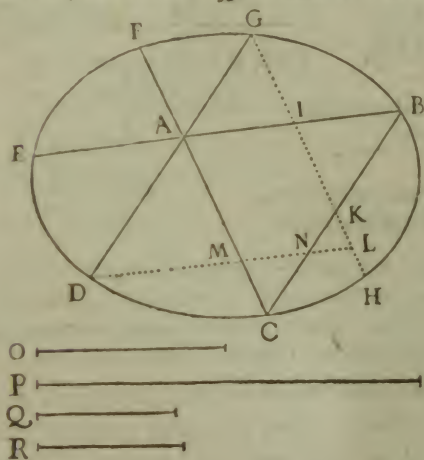
Cæterum cum non absimili modo à data qualibet figura recti-
linea portio datæ magnitudinis abscindi possit, aut etiam quæ
ipsius figuræ certam partem sive partes contineat, lineis quibus-
dam duntaxat lateribus parallelis & ab iisdem æquali intervallo
distantibus: plura hac de re afferre supervacaneum duximus, præ-
sertim cum materiam hanc nec non determinationes eò spectan-
tes jam sæpius in Lectionibus nostris Publicis abundè pertracta-
verimus

verimus, eaque occasione illa multis etiam jam diu innotuisse cer-
tò sciverimus.

THEOREMA,

quod ad solutionem artificiosissimam Proble-
matis pag. 372 ut concessum supponitur.

*Cum in rimanda olim solutione Problematis p. 372 nonnulla
deprehendissim, quæ ad eandem ut concessa supponebantur, eaq.
post commentarios meos in hanc Geometriam Theoremate ad id
Geometricè resolutò corroborâssim: visum fuit calculum è quo
eandem resolutionem tunc deprompsi hic in medium afferre, ac
quo pacto idem à me sit præstitum eâ quâ potero perspicuitate cui-
vis ab oculos ponere. In quem finem si huc revocetur Theorema
jam dictum unâ cum illis, quæ ad explicationem ejus p. 369 & 370
ulterius sunt allata, inspiciendus erit deinceps sequens calculus.*



Assumpto quasi-
to ut vero, hoc est,
CA esse ad AF,
sicut CB ad AG
ducatur porro DL
parallela AB, se-
cans CA, CB in M
& N, ac occurrens
ipsi GH in L, po-
naturque DA ∞ γ.

Deinde calculus
sic procedat

Ex assumptione est

$$CA : AF :: CB : AG$$

$$c : d :: b : ad \frac{db}{c} \propto \gamma$$

Ex similitudine $\Delta^{lorum} BAC$ & AIG est

$$BC : CA :: AG : GI$$

$$b : c :: \frac{db}{c} : ad \frac{db}{c} / ad d. \text{ Unde } IK \text{ erit } \propto c - d, \text{ pro qua}$$

brevitatis causâ scribatur f.

Et apparet ex hac assumptione GI inveniri æqualem FA.

Ecc 2

item-

itemque

CA AB GI IA

$$\begin{array}{c} c \text{ --- } a \text{ --- } d / \text{ ad } \frac{ad}{c} \\ \text{Ex similitudi-} \\ \text{ne } \triangle \text{rum CAB} \\ \text{\& KIB est} \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{AE. } e \\ \text{EI. } \frac{ce+ad}{c} \end{array} \right\} \text{add.}$$

Ex similitudi-
ne \triangle rum CAB
& KIB est

$$\begin{array}{c} \text{CA AB KI} \\ c \text{ --- } a \text{ --- } f / \text{ ad } \text{IB. } \frac{af}{c} \\ \text{\& 2} \end{array} \left. \begin{array}{c} \text{EI. } \frac{ce+ad}{c} \\ \text{EIB. } \frac{ceaf+adaf}{cc} \end{array} \right\} \text{Mult.}$$

CA AB KI

$$\begin{array}{c} c \text{ --- } a \text{ --- } f / \text{ ad } \text{IB. } \frac{af}{c} \\ \text{\& 2} \end{array}$$

$$\text{EIB. } \frac{ceaf+adaf}{cc}$$

Ex hypothesi est

BA AE BC AD

$$a \text{ --- } e \text{ --- } b / \text{ ad } \frac{eb}{a} \propto \gamma$$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3^{ti}
Conicorum Apollonii, pro-
portionalia sunt

$$\begin{array}{c} \square \text{FAC} \square \text{GKH} \square \text{DAG} \square \text{CKB} \\ d \text{ --- } c \text{ --- } e \text{ --- } x \text{ --- } y \text{ --- } b \text{ --- } z \\ \text{seu, rejectis communibus altitudini-} \\ \text{bus AC, GK; \& AG, CK} \\ \text{FA KH DA KB} \end{array}$$

hoc est, restitutis valoribus ipsa-
rum y & z

$$d \text{ --- } x \text{ --- } \frac{eb}{a} \text{ --- } \frac{cb-db}{c} \text{ seu } \frac{fb}{c}$$

Unde KH seu x , per 16. 6^{ti},

$$\text{fit } \propto \frac{acd-add}{ce} \text{ seu } \frac{adf}{ce} \\ \text{add. IK. f.}$$

$$\text{IH. } \frac{cef+adaf}{ce}$$

Denique ex natura Elli-
psis, per 17. 3^{ti} Conicorum
Apollonii,

\square GIH est ad \square FAC,
Seu, propter rectas GI, FA,
supra æquales,

IH ad AC, ut \square EIB ad \square EAB

$$\frac{cef+adf}{ce} - c - \frac{ceaf+adaf}{cc} - ea$$

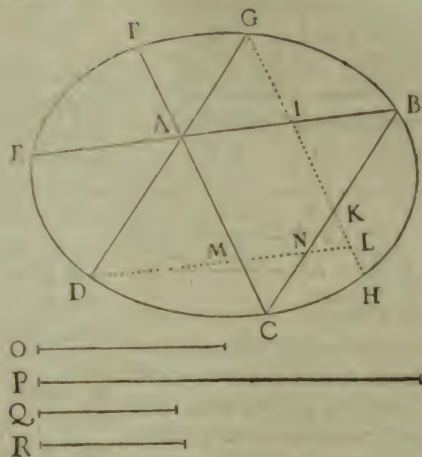
Et fit, multiplicando tum medios tum
extremos, $ace+aad \propto ace+aad$.

Id quod arguit, cum assumendo quæsitum tanquam concessum per calculum hunc Geometricum ad verum concessum devenimus, quæsitum illud, quod cum hoc concessio omnimodo connectitur, esse quoque verum. Quod erat ostendendum.

Porro ut intelligatur, quâ ratione ex hoc calculo supra dicta resolutio à me deducta fuerit: haud gravabor eundem calculum hic ulterius ita disponere, dictamq; resolutionem illi à late-re sic adhibere, ut cuius sedulo hæc inspiciens enucleatè appareat, quisnam inter illum & hanc resolutionem mutus consensus existat. Prasertim cum hujus resolutionis inventio deinde mihi ansam, complures alias demonstrationes Geometricas

-con-

conficiendi, subministraverit; atque ipsa etiam artificium detexisse mihi visa sit, quo Veteres, in multis difficilioribus demonstrationibus concinnandis, usi sunt. Qui quidem id unice studuisse videntur, quò sua inventa eorumq; demonstrationes posteris majori admirationi forent, ut modum, quo ea ipsa invenerint ac demonstrationibus muniverint, prorsus supprimerent & absconderent.



Ex assumptione

CA AF CB AG

$c — d — b$, ad $\frac{d}{c} \propto \gamma$

Et permutando per 16. 5

CA CB AF AG

$c — b — d$, ad $\frac{d}{c}$

Ex similitudine $\Delta^{rum} BAC, AIG$

BC CA AG GI

$b — c — \frac{d}{c}$, ad d .

Et convertendo per Cor. 4. 5

CA CB GI AG

$c — b — d$, ad $\frac{d}{c}$

Quoniam igitur supponitur CA esse ad AF, sicut CB ad AG; erit etiam permutando CA ad CB, sicut AF ad AG.

Jam quia, ex similitudine $\Delta^{rum} BAC \& AIG$, BC est ad CA, sicut AG ad GI; & convertendo CA ad CB, sicut GI ad AG: erit AF per 9. 5^{ti}

ipsi GI æquales. Eodem modo æquales erunt EA & DM.

Quia hic ex assumptione reperitur GI exprimi per eandem quantitatem quam AF, colligitur inde ipsas æquales esse.

Haud secus æquales erunt EA & DM.

Ecc 3

Ex

Ex hypothesi

BA AE BC AD

$$a - e - b / \text{ad } \frac{eb}{a} \propto y$$

Ex natura Ellipsis, per 17. 3^{ui} Conico-
rum Apollonii

□FAC □GKH □DAG □CKB

$$dc - cx - yz - bz - zz$$

H.e., rejectis communibus altitudinibus
AC, GK; & AG, CK,

FA KH DA KB

$$d - x - y - b - z$$

Et restitutis ipsarum y & z valoribus

FA KH DA KB

$$d - x - \frac{eb}{a} - \frac{cb - db}{c} \text{ seu } \frac{fb}{c}$$

$$\frac{ceb}{af}$$

$$KH \quad ce - af$$

$$\text{Fit } x \propto \frac{adf}{ce}$$

Jam ut ex Elementis constet, quo pa-
cto ratio ipsius DA ad KB in simplicissi-
mis terminis exprimi possit, cum via il-
lam inveniendi multiplicatione per cru-
cem (quemadmodum vulgò fit) omnino
sit Algebraica: calculum hìc apponam,
è quo ipsæ DA & KB resultant.

BA AE BC AD

$$a - e - b / \text{ad } \frac{eb}{a}$$

CA IK BC KB

$$c - f - b / \text{ad } \frac{fb}{c}$$

EA AB

$$e - a$$

CA IK

$$23.6. \quad c - f$$

□CAE □KI, AB

$$ee - af$$

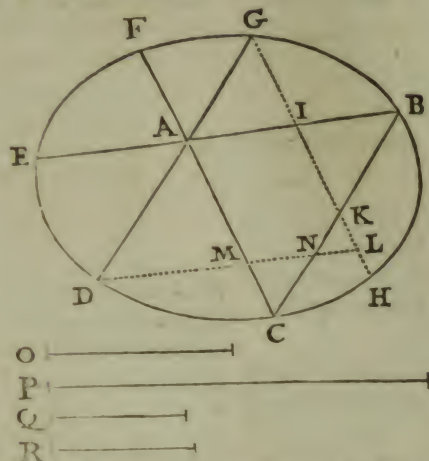
Ubi apparet, cum in

utraq; hac proportionis regula idem ter-
minus BC ipsiis AD & KB præcedat, quod
ratio ipsius AD ad KB, per hujus BC in-
terpositionem, sit composita ex ratione AD
ad BC seu EA ad AB, hoc est, e ad a , & ex
ratione BC ad KB seu CA ad IK, hoc est,
 c ad f . Ac proinde, cum ratio ex his compo-
sita, per 23.6, sit eadem rationi, quam habet
□CAE ad □KI, AB, seu ee ad af : erit quo-

que

Porro cum ex natura
Ellipsis □FAC sit ad
□GKH, seu, propter
rectarum AC, GK æ-
qualitatem, FA ad KH,
sicut □DAG ad
□CKB, h.e., propter
æqualitatem rectarum
AG, CK, ut DA ad KB;
& quidem ratio DA ad
KB, composita sit ex
ratione DA ad CB seu
EA ad AB, & ex ratio-
ne CB ad KB seu CA
ad IK: erit quoque ra-
tio FA ad KH compo-
sita ex ratione EA ad
AB, & ex ratione CA
ad IK. Ideoque cum
ratio composita ex ra-
tione EA ad AB, &
ex ratione CA ad IK,
sit ea, quam habet
□CAE ad □KI, AB:
erit similiter ratio i-
psius FA ad KH ea,
quam habet □CAE
ad □KI, AB.

que ratio ipsius FA ad KH seu d ad x eadem, quam habet
 \square CAE ad \square KI, AB, seu ce ad af.



IH ad AC non satis commodè videtur Geometricè explicabilis: quæsi prius rationem ipsius IH ad IK; inde per compositionem rationis conversam, & per alias denique comparationes venio ad rationem ipsius IH ad AC, ut sequitur.

Esto KI ad FA, KH
 $\frac{f}{d} \dots \dots \dots x$
 ut O ad CA.
 $3^* \frac{cf}{d} \dots \dots \dots c$
 Mult. per AE. $c \dots \dots \dots c$
 hoc est, ut \square O, AE ad \square CAE \square KI, AB
 per 1. 6. $\frac{cef}{d} \dots \dots \dots af$
 Unde ex æquo & per compositionem rationis
 conversam erit
 Ut KI + KH seu IH ad KI,
 $\frac{f+x}{f} \dots \dots \dots f$
 sic \square O, AE + \square KI, AB ad \square O, AE.
 $\frac{cef}{d} + af \dots \dots \dots \frac{cef}{d}$

Ad comparandam KI ad FA, IH cum sicut linea AC, quia, O ad CA. inventa Unde, assumptâ KH $\propto \frac{adf}{ce}$, ad KH addi prius debet IK $\propto f$, ut habeatur IH $\propto \frac{cef+adf}{ce}$; sed hoc pacto ratio ipsius

Estojam KI ad FA, sicut linea O ad CA. Unde, assumptâ AE pro communi altitudine, erit KI ad FA, sicut \square sub O & AE ad \square CAE. Erat autem FA ad KH, sicut \square CAE ad \square KI, AB. Quare ex æquo erit ut KI ad KH, sic \square O, AE ad \square KI, AB; & per compositionem rationis conversam KI + KH seu IH ad KI, sicut \square O, AE + \square KI, AB, ad \square O, AE.

Sit

IH Sit KI ad AC, Deinde sit ut
 $f+x \dots \dots \dots f \text{ --- } c$ KI ad AC, ita

ut O ad P. 4* O ad P. Unde,

$\frac{cf}{d} \text{ --- } \frac{cc}{d}$ assumptâ AE

Mult. per AE. e e pro communi

hoc est,

$\square O, AE + \square KI, AB$ ut $\square O, AE$ ad $\square P, AE$

$\frac{cef+adf}{d} \dots \dots \dots \frac{cef}{d} \text{ --- } \frac{cce}{d}$

Unde ex æquo erit ut IH ad AC, ita

$\square O, AE + \square KI, AB$ ad $\square P, AE$.

Sed ut IH ad AC, ita quoque est
 propter rectas IG & FA supra æquales
 mult. per IG FA

per 1.6. $\square GIH$ ad $\square FAC$, hoc est, per

17.3ⁱⁱⁱ Conic. Apoll., ut $\square EIB$ ad $\square EAB$

Quocirca erit ut $\square O, AE + \square KI, AB$
 ad $\square P, AE$, ita $\square EIB$ ad $\square EAB$.

sicut $\square EIB$ ad $\square EAB$; & quidem IG & AF, ut supra, æqua-
 les sint ostensæ: erit quoque IH ad AC, sicut $\square EIB$ ad $\square EAB$.
 Ut autem IH ad AC, sic quoque erat $\square O, AE + \square KI, AB$ ad
 $\square P, AE$. Quocirca erit ut $\square O, AE + \square KI, AB$ ad $\square P, AE$,
 ita $\square EIB$ ad $\square EAB$.

Fiat jam, ut AE ad AB, ita KI ad Q

$e \text{ --- } a \text{ --- } f, \frac{af}{e} \cdot s^*$

eritque per 16.6. $\square KI, AB \propto \square Q, AE$.

Adeoquæ ut

$\square O, AE + \square KI, AB$, seu $\square Q, AE$ ad $\square P, AE$,

hoc est, rejectâ communi altitudine AE,

ut $O + Q$ ad P, sic $\square EIB$ ad $\square EAB$.

$\frac{cf}{d} + \frac{af}{e} \text{ --- } \frac{cc}{d} \text{ --- } \frac{ceaf+adaf}{cc} \text{ --- } ea$

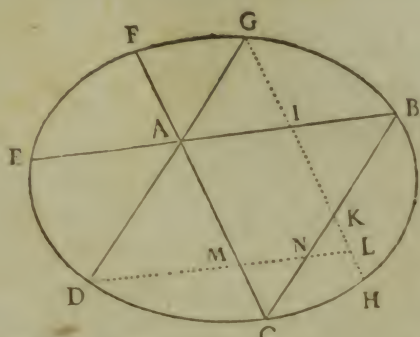
hoc est, destruen-
 do communem
 altitudinem AE, ut $O + Q$ ad P, sic $\square EIB$ ad $\square EAB$.

Explicita itaque est ratio, quam habet $\square GIH$ ad $\square FAC$,
 quippe ostensa est eadem quæ ipsius IH ad AC, seu $O + Q$ ad P.

Quo-

Quocirca jam ratio explicanda restat, quæ est inter $\square EIB$
& $\square EAB$.

Quoniam autem in hac explicanda ad 4^{or} dimensiones ascen-
ditur, deveniendum erit ad pauciores dimensiones, ut tota reso-
lutio duntaxat per rectarum aut planorum considerationem ab-
solvatur.



O _____
P _____
Q _____
R _____

$$EI \quad \text{feu} \quad EA + AI \quad EA$$
$$\frac{ce + ad}{c} \quad \frac{af}{c}$$
$$\square \text{EIB seu } \square \text{ sub EA} + \text{AI in IB} \quad \square \text{EAB}$$

$$\frac{e e a f + a d a f}{e e} \quad \text{---} \quad e a$$

Ut EI seu $EA + AI$ est ad EA,
 $\frac{ce + ad}{c}$ ————— c

Mult. per CA. $c \dots c$
 sic $\square EA, CA + \square AI, CA$ est ad $\square CAE$.
 $ce + ad \dots ce$

Vel, si pro $\square EA$, $\in A$, propter similitudinem
 $\triangle_{\text{run}} CAB$ & AMD , ubi CA est ad AB ,
 Fff

Porro
 quoniam
 ratio \supset
 EIB ad
 $\supset EAB$
 compo-
 sita est ex
 ratione
 E seu EA
 $+ AI$ ad
 EA , & ex
 ratione
 IB ad AB ,
 & qui-
 dem EA
 $+ AI$ ad
 $E A$, si
 com-

sicut AM ad MD seu EA scribatur $\square BAM$,
 sicut $\square BAM + \square CAI$ ad $\square BAM$.
 Vel rursus, si pro $\square CAI$, propter similitudinem
 $\triangle BAC$ & $\triangle AIG$, scribatur $\square BA, GI$,
 sicut $\square BAM + \square BA, GI$ ad $\square BAM$,
 hoc est, sicut $AM + GI$, hoc est, GL ad AM .
 relicta com-
 muni altitudine BA ,

Ut IB est ad AB ,

$$\frac{af}{c} \text{ ----- } a$$

Mult. per CA

$$c \dots \dots c$$

ita $\square IB, CA$ est ad $\square CAB$.

$$\frac{af}{c} \text{ ----- } ca$$

Vel, si pro $\square IB, CA$, propter similitudinem
 $\triangle CAB$ & $\triangle KIB$, scribatur $\square KI, AB$,
 sic $\square KI, AB$ ad $\square CAB$, hoc est, relicta
 communi altitudine AB , sicut KI ad CA .

CA seu KI, AB ad $\square CAB$, hoc est, destruendo communem altitudinem AB , sicut KI ad CA : Erit quoque ratio $\square EIB$ ad $\square EAB$, hoc est, ipsius $O + Q$ ad P , composita ex ratione GL ad AM , & ex ratione KI ad CA .

Constat igitur, rationem $\square EIB$ ad $\square EAB$ seu ipsius $O + Q$ ad P esse compositam ex ratione GL ad AM , & ex ratione KI ad CA .

Jam quia superior ratio ipsius $O + Q$ ad P nulli rationi linearum, quæ in Ellipsi ductæ sunt, responderet; neque etiam adhuc luculenter patet, eam, si cum ratione GL ad AM , aut KI ad CA confertur, ex his compositam esse, quemadmodum ex assumptis jam fuit deductum; fiat præterea ut

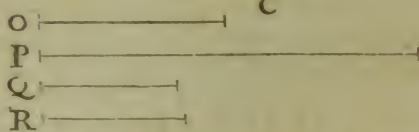
KI ad Q , sic FA ad R .

$$f \text{ --- } \frac{af}{c} \text{ --- } d \text{ / } \frac{ad}{c} \text{ . } 6^*$$

eritque, per 16. 6^{ti},

$\square KI, R \propto \square Q, FA$.

Denique fiat ut KI
 ad Q , sic FA ad R :
 eritque $\square KI, R$ æ-
 quale $\square Q, FA$. Ac
 proinde cum $O + Q$
 ad P ,



Ut $O + Q$ est ad P ,
 $\frac{ef}{d} + \frac{af}{e} = \frac{ce}{d}$
 Mult. per $FA \cdot d$
 sic $\square O, FA$ seu $KI, CA, + \square Q, FA$ seu KI, R est ad $\square P, FA$ seu $\square CA$. Rad
 Vide supra ad notam 3^a $ef + \frac{daf}{e} = ce$ $\square P, FA$ seu

Cur $\square P, FA$ sit $\propto \square CA$, ita concluditur
 3^a Est namque KI ad FA , ut O ad CA ;
 $f \text{ --- } d \text{ --- } \frac{ef}{d} \text{ --- } c$

& convertendo

FA ad KI , CA
 $d \text{ --- } f \text{ } c$ Vide supra
 ut CA ad O . P ad notam
 $c \text{ --- } \frac{ef}{d} \text{ } \frac{ce}{d}$ 4^a

Unde ex æquo erit
 ut FA ad CA , ita CA ad P .
 $d \text{ --- } c \text{ --- } c \text{ --- } \frac{ce}{d}$

Ac proinde, per 17. 6^{ta}, $\square P, FA \propto \square CA$.
 Fff 2 KI

$$\begin{array}{rcl}
 & KI & CA \\
 f & \text{-----} & c \\
 23.6. & CA+R & CA \\
 & c+\frac{ad}{e} & \text{-----} & c \\
 \square KI, CA+\square KI, R & \square CA & \\
 cf+\frac{daf}{e} & \text{-----} & ce
 \end{array}$$

ratio KI ad CA, erit quoque reliqua ratio GL ad AM eadem reliquæ rationi CA+R ad CA, hoc est, erit GL ad AM, ut CA+R ad CA. Quod verum esse deinceps sic ostenditur.

Hinc cum ratio \square^{li} G I H ad \square F A C siue ipsius I H ad A C eadem sit ostensa quæ ipsius O+Q ad P, & hæc rursus eadem rationi, quæ componitur ex ratione KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA; at verò ratio \square^{li} E I B ad \square E A B eadem rationi, quæ componitur ex ratione GL ad AM, & ex ratione KI ad CA: sequitur, si ratio \square^{li} G I H ad \square F A C (quemadmodum suppositum fuit) eadem sit rationi \square^{li} E I B ad \square E A B, rationem compositam ex KI ad CA, & ex ratione CA+R ad CA debere quoque eadem esse rationi, quæ ex GL ad AM, & ex KI ad CA componitur. Ac proinde, si utrobique communis auferatur ratio KI ad CA, rationem reliquam CA+R ad CA eandem quoque fore reliquæ rationi GL ad AM.

Hoc autem cum nondum per se evidens sit, superest ut ipsum sequenti argumentatione resolvamus atque penitus manifestum reddamus.

Ex similitudine \triangle^{lorum} ABC & MDA est
AB AC MD seu AE MA seu IL

$$a \text{ --- } c \text{ --- } e / \text{ ad } \frac{ce}{a}. \text{ Unde GL fit } \propto d + \frac{ce}{a}.$$

Ex similitudine \triangle^{lorum} ABC & IAG est
BA AC AI IG seu AF

$$a \text{ --- } c \text{ --- } \frac{ad}{e} \text{ --- } d$$

Ac proinde, per 16.6^{ti}, \square BAF \propto \square CAI.

Ex similitudine \triangle^{lorum} GLD & AMD est
GL ad AM,

$$d + \frac{ce}{a} \text{ --- } \frac{ce}{a}$$

Quoniam enim, propter similitudinem triangulorum GLD & AMD, est ut GL ad AM ita DL seu EI ad DM

DEMONSTRATIONIBUS.

413

sicut DL seu EI ad DM seu EA;

$$e + \frac{ad}{e} \text{ --- } e$$

mult. per CA. e e

Vel per
r. 2^{da}

sicut EI, CA seu CAE + CAI seu AE, R ad CAE.

$$e + \frac{ad}{e} \text{ --- } e$$

hoc est, relicta communi altitudine

AE sicut CA + R ad CA.

DM seu

EA; ut

autem

EI ad

EA, ita,

assump-

ta com-

muni al-

titudine

Ex constructione est

KI Q FA R

Vide supra ad
notam 6 *

$$f \text{ --- } \frac{af}{e} \text{ --- } d / \frac{ad}{e}$$

itemque AE AB KI Q

Vide supra ad
notam 5 *

$$e \text{ --- } a \text{ --- } f / \frac{af}{e}$$

Ideoque AE AB FA R

$$\text{per 11. 5^{ta}. } e \text{ --- } a \text{ --- } d \text{ --- } \frac{ad}{e}$$

Ac proinde per 16. 6^{ta}, BAF \propto AE, R.

Hinc cum BAF etiam sit \propto CAI, erit similiter AE,

R \propto CAI.

Patet itaque GL esse ad AM, sicut CA + R ad CA. Ut erat
propositum.

Quare cum hoc pacto, assumentes quæsitum tanquam verum,
per resolutionem Geometricam devenerimus ad verum concessum:
sequitur, quæsitum illud, quod cum concesso isto omnimode
connectitur, verum esse. hoc est, umbram baculi C, quæ
transibat per A, transiisse similiter per B. Quod erat demon-
strandum.

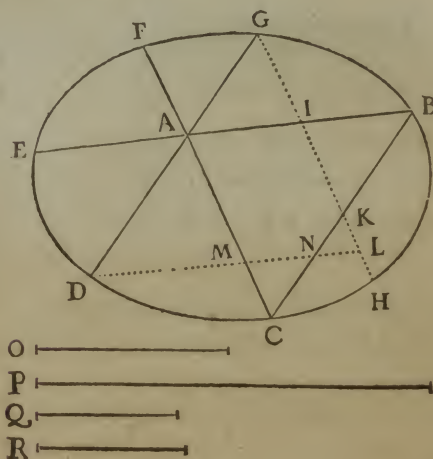
*Et hæc quidem, quæ Resolutionem Geometricam Theorema-
tis concernunt, quod ad solutionem Problematum pag. 372 ut
concessum suppositum fuit. Cæterum quoniam iis, qui cum Lo-
gicus statuunt ex falsis etiam posse verum concludi, resolutio
hæc ad quæsitum ostensionem incerta videri potest: placuit mayo-
ris certitudinis ergo idem Theorema Synthetice verificare, pro-
cedendo à concessis ad quæsitum, prout ad hoc me instigavit præ-*

Fff 3

stan-

stantissimus ac undequaque doctissimus juvenis D. Petrus Hart-
singius, Iaponensis, quondam in addiscendis Mathematicis disci-
pulus meus solertissimus.

Demonstratio autem ipsa filium calculi sequitur, qualis extat
pag. 370 & 371, at eodem nonnihil hic immutato; ut appa-
reat passim artificium, quo singula Geometricè explicari
queant.



Positâ, ut ante, $AD \propto y$

erit ut BA ad AE , ita BC ad AD

$$a \text{ --- } e \text{ --- } b / \text{ ad } y \text{ seu } \frac{be}{a}.$$

ac proinde per 16. 6^{ti}.

$$\square BA, AD, \square BC, AE$$

$$\propto ay \propto be.$$

Ex natura El-
lipsis per 17
Conicorum
Apollonii

$$AD.y \quad KB. b - z$$

$$AG.z \quad AG \text{ vel } CK. z$$

$$\text{est } \square DAG.yz \text{ ad } \square CKB. b - z - zz.$$

$$FA. d \quad KH. x$$

$$AC. c \quad AC \text{ vel } KG. c$$

$$\text{ut } \square FAC.cd \text{ ad } \square GKH.cx.$$

Quoniam igitur ex
hypothesi est BA ad
 AE , sicut BC ad
 AD : erit \square sub
extremis BA, AD æ-
quale \square sub me-
diis BC, AE . Deinde
quoniam ex natu-
ra Ellipsis est, ut
 $\square DAG$ ad $\square CKB$,
sive, rejectâ commu-
ni altitudine AG vel
 CK , ut DA ad
 KB , ita $\square FAC$
ad

AG AC ad \square GKH, id est, re-
 id est, rejectis communibus altitudinibus γ & ϵ ,
 erit ut DA ad KB, ita FA ad KH
 $\gamma - b - \gamma - d / \text{ad } x$.
 BA
 five, assumendo communem altitudinem x ,
 ut \square BA, AD seu \square BC, AE ad \square BA, KB, ita FA ad KH
 $\alpha \quad ay \quad \text{vel} \quad bc - ab - a\gamma - d / \text{ad } x. \delta$
 ad \square BA, KB: erit ut \square BC, AE ad \square BA, KB, ita FA ad KH.

Esto jam KI \propto f.

eritque propter similitudinem $\triangle^{rum} BCA \& BKI$
 ut BC ad CA, ita BK ad KI

$b - c - b - \gamma / \text{ad } f \text{ seu } \frac{cb - cz}{b}$. ac proinde
 add. HK. x per 16. 6^{ta}.
 mult. H I. $f + x$ \square BC, KI \square CA, BK
 per IG. $b \quad \gamma \quad bf \propto cb - c\gamma$.

Deinde sit IG \propto h.

\square GIH. $fh + hx$

eritque propt. simil. $\triangle^{rum} BCA \& AGI$
 ut BC ad CA, ita AG ad GI

$b - c - \gamma / \text{ad } h \text{ seu } \frac{cz}{b}$. ac proinde per
 16. 6^{ta}

Similiter esto AI \propto k,
 eritque propter simil. \triangle^{rum}
 BCA & AGI

ut BC ad BA, ita AG ad AI

$b - a - \gamma / \text{ad } k \text{ seu } \frac{az}{b}$. ac proinde per
 16. 6^{ta}
 add. AE. e
 mult. EI. $k + e$ \square BC, AI \square BA, AG
 per IB. $l \quad e \quad bk \propto a\gamma$.
 \square EIB. $kl + el$

Sit item IB \propto l.

eritque propter simil. $\triangle^{rum} BCA \& BKI$

Porro cum
 ex similitudine
 $\triangle^{rum} BCA \&$
 BKI, BC sit
 ad CA, sicut
 BK ad KI: erit
 \square sub BC, KI
 \propto sub CA, BK. Ea-
 dem ratione
 cum BC sit ad
 BA, sicut BK
 ad BI: erit \square
 sub BC, BI \propto
 sub BA, BK.

Haud secus
 cum similia sint
 $\triangle^{ra} BCA \&$
 AGI, ac idcir-
 co BC ad CA,
 sicut AG ad
 GI: erit \square sub
 BC, GI \propto sub
 CA, AG. Similiter
 cum BC sit ad

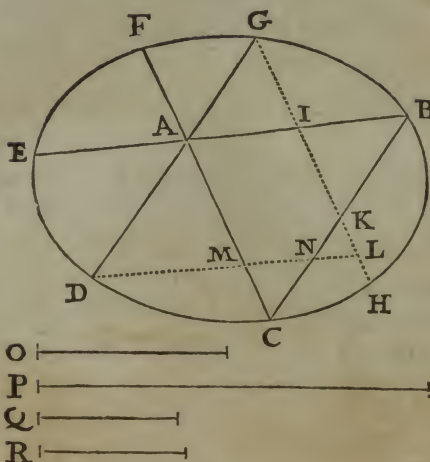
ut

ut BC ad BA, ita BK ad BI

$b \text{ --- } a \text{ --- } b \text{ --- } \chi$, ad l seu $\frac{ab-az}{b}$. ac proinde per 16. 6^{ti}

$\square BC, BI \square BA, BK$
 $\gamma \quad bl \propto ab-az$.

BA, sicut AG
ad AI: erit pa-
riter \square sub BC,
AI æquale \square lo
sub AB, AG.



Ex natura Ellipsis per 17. 3^{ti} Conic. Apollonii
est $\square FAC$ ad $\square GIH$, ut $\square EAB$ ad $\square EIB$

$cd \text{ --- } bf+bx \text{ --- } ae$, ad $kl+el$.

Est autem per 23. 6^{ti} ratio \square li $\square FAC$ ad $\square GIH$

$cd \text{ --- } bf+bx$

composita ex ratione FA ad IH seu IK+KH, &

$d \text{ --- } f+x$

ex ratione CA ad GI, id est, assumendo commu-

$c \text{ --- } b$

BC

nem altitudinem b , ex ratione \square li

β

BC, CA ad $\square BC$, GI vel $\square CA, AG$, sive, reje-

$bc \text{ --- } bb$ seu $c \chi$

CA

Etâ communi altitudine c , ex ratione BC ad AG.

$b \text{ --- } \chi$.

Jam verò, quia ex

natura Ellipsis \square

FAC est ad $\square GIH$,

ut $\square EAB$ ad $\square EIB$;

& quidem ratio \square li

FAC ad $\square GIH$

composita sit ex ra-

tionem FA ad IH seu

IK+KH, & ex ra-

tionem CA ad GI, id

est, assumendo com-

muniem altitudinem

BC, ex ratione \square li

BC, CA ad $\square BC$,

GI vel $\beta \square CA$,

AG, sive etiam, re-

Simi-

DEMONSTRATIONIBUS.

417

Similiter ratio \square^{li} E A B ad \square E I B composita est
 $\frac{ae}{e-l} = \frac{kl+el}{l}$
 ex ratione E A ad I B, & ex ratione A B ad E I.

Quarum quidem E A ad I B, si B C pro communi
 $\frac{e-l}{l} = \frac{a-k+e}{b}$
 altitudine sumatur, eadem est quæ \square^{li}

B C, E A ad \square B C, I B seu \square B A, B K, hoc est, ea-
 $\frac{be}{bl} = \frac{ab-a\gamma}{ab-a\gamma}$
 dem quæ \square F A ad K H.

Sed A B ad E I, si B C similiter pro communi altitu-
 $\frac{a-k+e}{b} = \frac{d-x}{b}$
 dine sumatur, eadem, quæ \square^{li} A B, B C ad \square B C, E I

vel \square B C, A I, id est, B A, A G, + \square B C, E A vel \square B A,
 five $\frac{a\gamma}{a\gamma} + \frac{ay}{ay}$
 A D, hoc est, reliquâ communi altitudine A B, seu a,
 eadem quæ B C ad A G + A D.

Erit igitur ratio composita ex ratione
 $\frac{d}{d} = \frac{f+x}{f+x}$
 F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est,

per 23. 6^a, ratio \square^{li} F A, B C ad \square I K, A G + \square K H, A G,
 $\frac{bd}{bd} = \frac{f\gamma+x\gamma}{f\gamma+x\gamma}$
 eadem rationi quæ componitur ex ratione F A ad K H,

& ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6^a,
 $\frac{b}{b} = \frac{\gamma+y}{\gamma+y}$
 eadem rationi, quam habet

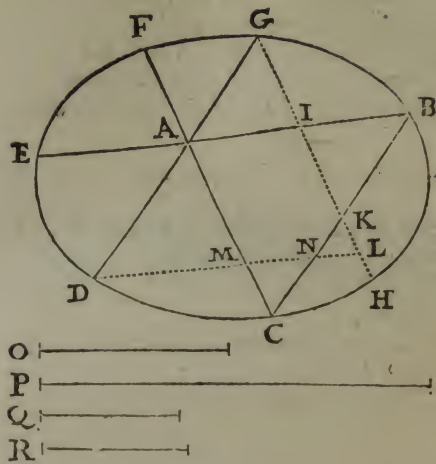
\square F A, B C ad \square K H, A G + \square K H, A D.
 $\frac{bd}{bd} = \frac{x\gamma+xy}{x\gamma+xy}$

composita ex ratione F A ad I K + K H, & ex ratione B C ad A G, id est, per 23.
 6^a, ratio \square^{li} F A, B C ad \square I K, A G + \square K H, A G, eadem rationi, quæ
 componitur ex F A ad K H, & ex ratione B C ad A G + A D, id est, per 23. 6^a,
 eadem rationi, quam habet \square F A, B C ad \square K H, A G + \square K H, A D.

G g g

jectâ communi
 altitudine C A,
 ex ratione B C ad
 A G; At ratio \square^{li}
 E A B ad \square E I B
 composita ex ra-
 tione E A ad I B,
 & ex ratione A B
 ad E I; quarum
 quidem E A ad
 I B, si B C pro
 communi altitu-
 dine sumatur, est
 sicut \square B C, E A
 ad \square B C, I B seu
 γ \square B A, B K,
 quæ eadem o-
 stensa est δ ratio-
 ni F A ad K H;
 sed A B ad E I, si
 B C similiter pro
 communi altitu-
 dine sumatur, ut
 \square A B, B C, ad
 \square B C, E I, id est,
 ad \square B C, A I vel
 ϵ B A, A G, +
 \square B C, E A vel
 α \square B A, A D, si-
 ve etiam, reliquâ
 communi altitu-
 dine A B, ut B C
 ad A G + A D:
 Erit ratio com-

Hinc



Hinc cum

$\square FA, BC$, sit ad $\square IK, AG + \square KH, AG$, sicut idem $\square FA, BC$ ad $\square KH, AG + \square KH, AD$: erit, per 9. 5^{ti},
 $bd \text{ ————— } f\zeta + x\zeta \text{ ————— } bd$ / cum \square

$\square KH, AG + \square KH, AD$: erit, per 9. 5^{ti},
 ad $x\zeta + xy$:

$\square IK, AG + \square KH, AG \propto \square KH, AG + \square KH, AD$.
 $f\zeta + x\zeta \propto x\zeta + xy$.

Unde, dempto utrinque communi $\square^{lo} KH, AG$,
 $x\zeta$

erit quoque reliq. $\square IK, AG \propto$ reliquo $\square^{lo} KH, AD$.
 $f\zeta$

xy

Ac proinde, per 16. 6^{ti},
 ut IK ad KH , ita DA ad AG .
 $f \text{ — } x \text{ — } y \text{ / ad } \zeta$.

reliquum $\square IK, AG \propto$ reliquo $\square^{lo} KH, AD$. Unde erit ut IK ad KH , ita DA ad AG .

Sed

DEMONSTRATIONIBUS.

419

Sed ut I K ad K H, ita est, ass. comm. altit. b ,
 $f \text{ --- } x$
 ζ
 \square I K, B C vel \square C A, B K ad \square K H, B C.
 $b f \quad c b - c \zeta \text{ --- } b x.$
 AB
 At D A ad A G, ita, ass. com. alt. a , est \square D A, A B
 $y \text{ --- } \zeta$ $a y$
 a
 vel \square B C, A E ad \square A G, A B.
 $b e \text{ --- } a \zeta.$
 Quare erit ut
 \square C A, B K ad \square K H, B C, ita \square B C, A E ad \square A G, A B.
 $c b - c \zeta \text{ --- } b x \text{ --- } b e / \text{ ad } a \zeta.$
 δ B C
 Cum autem supra sit F A ad K H, i.e., ass. com. alt. b ,
 $d \text{ --- } x$
 \square F A, B C ad \square K H, B C, sicut \square A E, B C ad \square K B, B A,
 $b d \text{ --- } b x \text{ --- } b e / \text{ ad } a b - a \zeta.$
 hoc est, convertendo
 \square K H, B C ad \square F A, B C, sicut \square K B, B A ad \square A E, B C:
 $b x \text{ --- } b d \text{ --- } a b - a \zeta / \text{ ad } b e:$
 Erunt \square C A, B K \square K H, B C \square F A, B C tres magni-
 $c b - c \zeta \text{ --- } b x \dots b d$ tudines ab
 una parte,
 & \square K B, B A \square A E, B C \square A G, A B tres alia ab
 $a b - a \zeta \dots b e \text{ --- } a \zeta$ altera par-
 te, quæ binæ sumptæ in eadem
 sunt ratione, quarumque proportio
 est perturbata:
 B A, \square A E, B C, & \square A G, A B tres alia ab altera parte, quæ binæ
 sumptæ in eadem sunt ratione, quarumque proportio est perturbata.
 G g g 2 Quare

Quare etiam per 23. 5^{ti} ex æqualitate proportionales erunt

id est, $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, sicut $\square KB, BA$

$$cb - c\zeta \text{ ——— } bd \text{ ——— } ab - a\zeta$$

BA

ad $\square AG, BA$, seu, rej. com. alt. a , ut KB ad AG .

$$\text{——— } a\zeta \text{ } b - \zeta \text{ ——— } \zeta$$

Id quod convenit cum æquatione inventa pag. 371, multiplicando sc. tum extremos tum medios terminos, ostendens nos in eodem calculo Geometricè explicando eò pervenisse, ubi

$$cb\zeta - c\zeta\zeta \text{ æquatur } bbd - bd\zeta.$$

Denique ut inveniat AG seu ζ , quoniam sumendo CA seu c pro communi altitudine,

KB est ad AG , sicut $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$:

$$b - \zeta \text{ ——— } \zeta \text{ ——— } cb - c\zeta \text{ / ad } c\zeta:$$

erit ut

$\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, ita $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$.

$$cb - c\zeta \text{ ——— } bd \text{ ——— } cb - c\zeta \text{ / ad } c\zeta.$$

Hinc cum $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$ & ad $\square CA, AG$

$$cb - c\zeta \text{ ——— } bd \text{ ——— } c\zeta$$

eandem habeat rationem, erit per 9. 5^{ti},

$$\square FA, BC \text{ æq. } \square CA, AG.$$

$$bd \propto c\zeta$$

Unde per 16. 6^{ti} erit,

ut CA ad AF , ita BC ad AG .

$$c \text{ ——— } d \text{ ——— } b \text{ / ad } \zeta$$

Quod erat propositum.

AG ; ac proinde CA ad AF , sicut BC ad AG . Quod erat demonstrandum.

Unde & ipsæ ex æqualitate proportionales erunt, nimirum, erit ut $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, ita $\square KB, BA$ ad $\square AG, BA$, id est, relictâ communi altitudine BA , ita KB ad AG . Denique, quoniam, assumptâ communi altitudine CA , KB est ad AG , sicut $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$: erit ut $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$, ita $\square CA, KB$ ad $\square CA, AG$. Quocirca cum $\square CA, BK$ ad $\square FA, BC$ & ad $\square CA, AG$ eandem habeat rationem, erit $\square FA, BC$ æquale $\square CA$,

F I N I S.

*Errata quæ post diligentius examen in prima huius operis parte insuper
reperita fuere, sic emendet benevolus Lector.*

Pag. 33, lin. 11 pro $\sqrt{00}$ lege $\sqrt{x00}$. ibid. l. 12, pro $\sqrt{00+4mp+mn}$
scribe $\sqrt{00+4mp+mn}$. p. 79, l. penult. pro $\sqrt{4r}$ scribe $\sqrt{4r}$. p. 83, l. 8, de-
leatur virgula transversa. p. 91, l. 6, lege $\frac{1}{2}$ a. p. 103, l. 2 pro $\frac{1}{2n\sqrt{v}}$ scribe $\frac{1}{2n\sqrt{v}}$.
p. 120, l. penult. pro $\frac{am^3}{0z}$ lege $\frac{am^3}{0z}$. p. 183, l. 7 pro $\frac{f0z}{z}$ scribe $\frac{f0z}{z}$. p. 298, l. 10
lege $\frac{-aa x + aa}{a + 1}$. p. 306, l. 3 pro 1140 scribe 1440. p. 311, inter K & M in fi-
gura notetur litera O. pag. 327, l. penult. loco rr pone $\frac{rr}{q}$. p. 355, l. penult. pro
 $3a^4b$ scribe $3a^4bb$. p. 357, in margine pro 349 lege 348. p. 370, l. 12 deleatur
linea transversa. p. 371, l. 15, ea scribatur literis minoribus, quibus calculus no-
tatur. p. 375, l. 2 lege $\frac{21prr}{8q}$. p. 415, l. 36, adde $+4abxx$. p. 416, ult. l. scribe
 $x - \sqrt{xx + aa}$. p. 423 in princip. scribe $d^4 \infty ad^3 + 2abdd - 2aabd \infty$
 $bbdd + aadd - aabb$. p. 442 in fine pro $x\sqrt{C. r \infty 0}$, pone $x + \sqrt{C. r \infty 0}$.
p. 443 in fine $xx \sqrt{1 - \frac{1}{r} \infty 0}$, pone $xx + \frac{1}{r} \infty 0$. p. 451, iuxta q, f, t , dele C .
p. 457, l. 4 lege A, B, C, D. p. 460 l. 22, adde $+\frac{1}{2}bbccx$. p. 470 in fine, dele,
in hoc exemplo. p. 475, l. 8, pro $+8by + 4f$, scribe $-8by - 4f$. p. 476 in fine,
pro non poterit radix extrahi, pone, poterit radix extrahi, inveniturque $y \infty - 1$,
scilicet æquatio Proposita non poterit dividi per $xx - 1$ $x + 1 \infty 0$. p. 478 in medio,
scribe $y + 3y - 10 \infty 0$. p. 483 l. 10, dele *cujus ultimus terminus fractione caret*,
& l. 12 lege *quantitates rationales fractioneque carentes*. p. 497 dele, *qua raro iti-*
dem eandem dimensionum numerum habent, utpote jam antea dictum. p. 499 l. 12,
pro $\frac{1}{2}$ p. 505 l. 2, scribe 1, 2, 12, 13 & 14. p. 517, l. 13, lege *inventam*.

Ceterum errata secunde partis huius operis sic restituat.

Pag. 42, l. 8, pro L 1 & 2 pone l. 2. p. 153, fig. 3 linea AC continua sit, quod &
aliis locis in eadem figura est observandum. p. 166, l. 9 pro MKG², *ut vero*
parabolum in puncto G, lege MKX², per parabolum transcat in puncto G. p. 171
& seqq., in fig. 2 pro MR lege MB. p. 179 in fig. 1, linea BE continue, ac RS per
puncta tantum ducta sit. p. 197, l. 3 pro ac lege ad . p. 206, in fig. 11 desideratur
litera L, ac in fig. 11 l, loco inferioris V. repon. Z. p. 225, in utraque figura linea
HA continua sit. p. 226, linea HK & HM ad F & N productæ sint. p. 233, l. 21
lege OAD & OAE. p. 239 fig. superioris linea BH per puncta ducta sit, quod
& observandum. p. 240 in eadem fig. p. 244, l. 11 a fine pro *linea* lege *linea*. p. 254,
l. 1 dele vocabulum *restituit*, quod ibidem uti & p. 262, l. 17. p. 316, l. 9 a fine,
p. 322, l. 3. p. 330, l. 12, & pluribus forsitan locis præter mentem auctoris irre-
psit. p. 292, l. 6 in fine loco aa substitute ba , ibid. in fig. notentur puncta ad D,
F & H, ita ut sit AF ∞ BG, FH ∞ GH & CD ∞ CB. p. 295, l. 2 a fine dele
naque. p. 311, l. 11 pro *critique* lege *C*. p. 324, l. 4 a fine pro *terminu* lege *ter-*
minus. p. 332, l. 6 pro *Hyperbole* lege *Hyperbole*.

LECTORI BENEVOLO

J. H U D D E S. P.

IN Galliis eram cum epistolæ meæ imprimerentur, ideoque domum redux, onus in me suscepi omnia de integro revidendi & ad calculum revocandi, ut probe mihi constaret, num quædam nimis obscurè expressa essent, vel etiam errata irrepsissent; Quæcunque inveni, illa sunt quæ sequuntur.

Ad clariorem sensum.

p. 424 l. 15, *Excepto* &c. Cum $x - a \propto 0$, multiplicatur per $b - c$, resultat $b x - c x - a b + a c \propto 0$, seu $x \propto \frac{ab - ac}{b - c}$; si ponas jam $b - c \propto 0$, non sequitur valorem x per hanc æquationem non posse inveniri, quandoquidem Nominator $ab - ac$ per $b - c$, dividi potest, sed tum sequitur cum Nominator per Denominator non dividi potest, vel cum ambo per eandem quantitatem indivisibiles sunt: Notandum ergo est Denominator hic considerari sine relatione ad Nominator, veluti patet ex sequentibus, 1^o. *Observandum venit num ejusmodi quantitates in æquatione reperiantur* &c. 2^o. *si reperiantur, num utramque æquationem dividant*. Sed hæc omnia fortassis clarius sic intelligentur. Excepto tantum si æquationis primus terminus non affectus quantitate cognita sit ab una parte, reliqui, qui ab altera sunt, faciant fractionem, cujus Denominator, vel Denominatoris divisor aliquis, Nominator dividat; quod si contingat, videndum est, priusquam concludatur non dari duarum æquationum communem aliquem divisorem, num etiam altera æquatio per hunc Denominator, vel Denominatoris divisorem aliquem, divisibilis sit. p. 459, l. 10. vel sic lege, æquatio illa semper indivisibilis erit per x, x^3, x^5 , &c., 8, vel per $x x, x^4, x^6$, &c., — quantitate quavis cognita atque rationali. p. 462, l. 29. pro *omnes quantitates*, pone omnia membra. p. 452, l. 13. pro *Regula*, scribe *Methodo*. p. 451 & 456, l. 1. lege, nullus terminus est $\propto 0$. p. 500, in medio, pro *Quoniam tunc* $\sqrt{C. ex \frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} r r - \frac{1}{2} q^3}}$ extrahi poterit; scribe, extrahendo $\sqrt{C. ex \frac{1}{2} r + \sqrt{\frac{1}{4} r r - \frac{1}{2} q^3}}$. & pro, *sed cum* $\sqrt{C. ex}$, usque ad, *liceat*, &c.; pone, *sed cum* $\sqrt{C. ex}$ binomio numerali ope Regulæ p. 389, vel perfectè extrahi queat, vel vulgari modo præterpropter, quod sufficit, poterit etiam ejusdem beneficio radix ex æquatione Proposita live numerali, live literali sit, inveniri, cum pro literis numeros, vel 0, ad arbitrium assumere liceat. p. 502, l. 31. & p. 505, l. 17. *reduci* hic sumitur pro *reduci* ad duas alias, ex quarum multiplicatione Proposita æquatio produci potest. Errata, quæ irrepsissent, inveniuntur inter errata primæ partis.

Nec tacere fas est me, non sine admiratione, in epistolis meis, quæ tam sedulam typosetiarum operam requirebant, tam paucos errores offendisse, nisi cogitarem D. Elzevirios & Clarissimum Schotenium totis viribus huic opere incubuisse, quapropter nullus dubito quin reliquum totum opus accuratius impressum sit, quam quis fortassis expectasset.

C A R M E N
IN LAVDEM
FR. à SCHOOTEN,
Mathematicorum ocelli.

S Coten I cum scripta legis, se promit ubique
Ingenii mira dexteritate vigor.
Cum vitam ac mores spectas, se præbet ubique
Spectandam integritas, ac sine fraude manus.
Sic quæ perrarò concurrunt corpore in uno,
Hic jungi ingenium cum probitate vides.
Adde quod, ingenium cum sit superabile paucis,
Vix tamen invenies in probitate parem.

Π Ε Ρ Ι
ΦΡΑΓΚΙΣΚΟΥ ΣΚΩΤΗΝΟΥ,

ἔ μακαρίτης,

Διάλογος Μαθήσεως, Εὐσεβείας, καὶ Οὔδοιπρου.

- Μάθ. **Τ**ὶ κλαίεις; σφέλλεργας τί νέον φρένας ἵκετο πένθος;
(Ἐξαυδα, καὶ μὴ κλύθῃς νῶ, Εὐσεβίη)
Ἡ δ' ἐοδήτα μέλαιναν ἐέσαιο; χώματα τέττω
Ἡ μάλα καὶ πάσας νύκτας ἐφεζομένη;
Εὐσ. Θυμῆς μοι ἦος ἀπώλετο, φέρεται ἀνδρῶν,
Ὅς Σοφίη θείω μιξε ταπεινοσύνη.
Τὸν Βαλφωὶν Δέγδονον ἐγείνατο, πέντε μαθητῶν
Δωκά σοι ἐξ ἀπαλῶ ἀλγύνοον βρέφεος.
Μ. Σκώτλω; Ε. κύν. Μ. Σκώτλω; λείψανον ἀνδρῶν
Χρυσεία γλῆς, λείψανον ἡμιθέων;
Σκώτλω; ἢ ἐμοῖσιν ἴσθι φαέεσσι φίλησα,
Ἡ δέ μ' ὥσπερ πασῶν ἀντεφίλησε θεῶν.
Ὅς πῆρον ὄρε' ὀπίρων, αἰεὶ φώπασε σκοτεινόν.
Συμμύσεις, ζοφερῶ κέπητι ἐνὶ σκότει;
Εὐσ. Εἰνὶ σκότῳ κέπητι, πᾶσιν μερόπασσι φαεινός,
Οἷ τε καὶ Εὐσεβίω, καὶ σε, Φίλη, ἐφίλον.
Μάθ. Οὐκ ἀλόγως ἀκρίτως τε, θεῶν, καὶ δάκρυα λείβεις,
Καὶ σέρνον πλῆλεις αἰὲν ὀδυρομένη.
Δὸς τέπν, ἔχ' ὅπως (τὸ πάλαι τάχα πειρησάμεν)
Ὅτταν ἔλω πάντων παλὺ μάκαρ μακάρων)
Γαίην κινήσαιμι, ἀκίνητον περ ἔσαν,
Αὐτὰρ ὅπως, ποσσὶν σείω πρῶσις αὐλή,
Αὐτὴ ἀκίνητος μένων, νεαρῆς τε λυπηρόν
Μνήμα πέλω Νιόβης πᾶσιν ἐφημερίοις.
Οὔδοιπ. ὦ θεῶν, σὺν ἔστιν δακρύων ἄλγος; ὅστις νεκρὸς
Δάκρυσι καὶ στυγερῶς εἰς φάος αὐθιγῆς ἔβη.
Ἄλλ' ἵτε, καὶ ὁδομοῖσι ῥόδοις κατὰ πᾶσας γαίην,
Λείρεα μιξάμεναι καὶ κυαναυγὲς ἴον.
Εὐξάσθ', ὥσπερ ἔλω μερόπων βαρὺς ἐδενὶ ζωὸς,
Οὕτω καὶ κύνῃ γαῖα νεκρῶν πελήθη.

Μ. Σ Λ Α Ὡ Δ Ο Σ,
ἰαλγὸς Ἀμπελ.

00526725

